

14^ο φύλλο - Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών

Απαντήσεις

Ερώτηση 1

Ο Άλκης διάλεξε τρεις από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Μετά πολλαπλασίασε τους τρεις αριθμούς που διάλεξε. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το γινόμενο που βρήκε;

- A) 27 B) 35 Γ) 39 Δ) 64 E) 288

Λύση

Οι διαιρέτες του 39 είναι 1, 3, 13 και 39. Άρα ο μόνος τρόπος είναι $1 \cdot 3 \cdot 13$. Όμως οι αριθμοί 1, 3, 13 δεν είναι μέσα στους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Για τους υπόλοιπους αριθμούς έχουμε

$$27 = 1 \cdot 3 \cdot 9, 35 = 1 \cdot 5 \cdot 7, 64 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \text{ και } 288 = 4 \cdot 8 \cdot 9$$

Σωστό το Γ

Ερώτηση 2

Είναι γνωστό ότι το βάρος του αλατιού προς το βάρος του καθαρού νερού μέσα στο θαλασσινό νερό έχουν λόγο 7:193. Πόσο ζυγίζει το αλάτι σε 1000 κιλά θαλασσινό νερό;

- A) 35 κιλά B) 186 κιλά Γ) 193 κιλά Δ) 200 κιλά
E) 350 κιλά

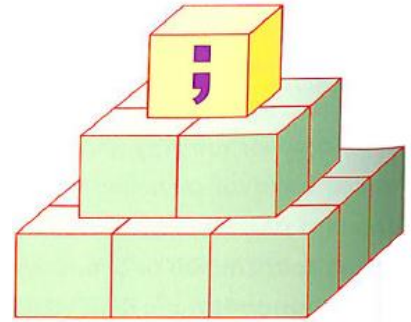
Λύση

Σε $7+193=200$ κιλά θαλασσινό νερό, τα 7 κιλά θα είναι αλάτι και τα 193 κιλά καθαρό νερό. Στα 1000 = $5 \cdot 200$ κιλά, το αλάτι θα είναι $5 \cdot 7 = 35$ κιλά.

Σωστό το Α

Ερώτηση 3

Σε καθένα από τους 14 κύβους της κατασκευής του σχήματος είναι γραμμένος από ένας αριθμός. Στους 9 κύβους της βάσης είναι γραμμένοι, με κάποια σειρά, οι αριθμοί 1 έως 9 από μία φορά ο καθένας. Σε καθένα από τους υπόλοιπους κύβους ο αριθμός που είναι γραμμένος στον κύβο ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών στους κύβους που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός που μπορεί να έχει ο κύβος στην κορυφή;



- A) 60 B) 80 Γ) 84 Δ) 98 E) 104

Λύση

Στους 4 κύβους στο πιο πάνω επίπεδο είναι γραμμένοι οι αριθμοί $\alpha + \beta + \delta + \varepsilon$ κτλ.

Ο αριθμός ε εμφανίζεται και στους τέσσερις αυτούς κύβους.

Οι αριθμοί $\beta, \delta, \zeta, \theta$ σε δύο κύβους και οι αριθμοί $\alpha, \gamma, \eta, \iota$ σε έναν κύβο.

Στον κύβο της κορυφής έχουμε $4\varepsilon + 2(\beta + \delta + \zeta + \theta) + (\alpha + \gamma + \eta + \iota)$.

α	β	γ
δ	ε	ζ
η	θ	ι

Πρέπει το παραπάνω άθροισμα να είναι μέγιστο. Συνεπώς αρχικά θέτουμε $\varepsilon = 9$ οπότε οι αριθμοί $\beta, \delta, \zeta, \theta$ θα είναι οι 8, 7, 6 ή 5 και το άθροισμα $\alpha + \gamma + \eta + \iota = 1, 2, 3$ ή 4. Άρα το μεγαλύτερο άθροισμα που μπορούμε να βρούμε είναι:

$$4 \cdot 9 + 2 \cdot (8 + 7 + 6 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4) = 98$$

1	5	2
6	9	7
3	8	4

Σωστό το Δ

Ερώτηση 4

Στο κλάσμα $\frac{\text{Κ} \cdot \text{Α} \cdot \text{Γ} \cdot \text{Κ} \cdot \text{Ο} \cdot \text{Υ} \cdot \text{Ρ} \cdot \text{Ο}}{\text{Σ} \cdot \text{Κ} \cdot \text{Υ} \cdot \text{Λ} \cdot \text{Ο} \cdot \text{Σ}}$ τα γράμματα αντιστοιχούν σε ψηφία διαφορετικά από το 0. Ίδια γράμματα αντιστοιχούν σε ίδια ψηφία και διαφορετικά γράμματα σε διαφορετικά ψηφία. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το κλάσμα;

- A) $\frac{2}{21}$ B) $\frac{5}{24}$ Γ) $\frac{15}{72}$ Δ) $\frac{12}{81}$ E) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Για να πάρει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή το κλάσμα, θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος από τον αριθμητή. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\text{Κ} \cdot \text{Α} \cdot \text{Γ} \cdot \text{Κ} \cdot \text{Θ} \cdot \text{Υ} \cdot \text{Ρ} \cdot \text{Ο}}{\text{Σ} \cdot \text{Κ} \cdot \text{Υ} \cdot \text{Λ} \cdot \text{Θ} \cdot \text{Σ}} = \frac{\text{Α} \cdot \text{Γ} \cdot \text{Κ} \cdot \text{Ρ} \cdot \text{Ο}}{\text{Σ} \cdot \text{Λ} \cdot \text{Σ}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{5}{27}$$

Δηλαδή ξεκινάμε τοποθετώντας τους μεγαλύτερους αριθμούς στον παρονομαστή και τους μικρότερους στον αριθμητή με οποιαδήποτε σειρά, έχοντας όμως υπόψη ότι ίδιο γράμμα αντιστοιχεί στον ίδιο αριθμό.

Σωστό το Ε

Ερώτηση 5

Το γινόμενο τριών φυσικών αριθμών ισούται με 140. Ο δεύτερος από τους αριθμούς είναι επταπλάσιος του πρώτου, και ο τρίτος από τους αριθμούς είναι μικρότερος από τον δεύτερο. Πόσο είναι το άθροισμα των τριών αυτών φυσικών αριθμών;

- A) 19 B) 21 Γ) 28 Δ) 43 Ε) δεν μπορούμε να ξέρουμε

Λύση

Ο 1^{ος} αριθμός είναι 2.

Ο 2^{ος} αριθμός είναι 14.

Ο 3^{ος} αριθμός είναι 5.

Συνεπώς $2 \times 14 \times 5 = 140$ οπότε $2+14+5=21$.

Σωστό το Β

Ερώτηση 6

Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha = \frac{2010}{2011}$, $\beta = \frac{20102010}{20112011}$, $\gamma = \frac{201020102010}{201120112011}$. Ποιο από

τα παρακάτω ισχύει;

- A) $\alpha = \beta < \gamma$ B) $\alpha < \gamma < \beta$ Γ) $\gamma < \alpha = \beta$ Δ) $\gamma = \beta < \alpha$
 E) $\alpha = \beta = \gamma$

Λύση

Ισχύει ότι $20102010 = 2010 \cdot 10001$ και $20112011 = 2011 \cdot 10001$

Άρα:

$$\beta = \frac{20102010}{20112011} = \frac{2010 \cdot 10001}{2011 \cdot 10001} = \frac{2010}{2011} = \alpha$$

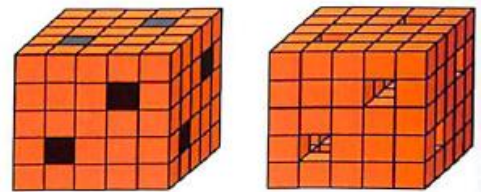
$$\gamma = \frac{201020102010}{201120112011} = \frac{2010 \cdot 2010 \cdot 2010}{2011 \cdot 2011 \cdot 2011} = \frac{20102010}{20112011} \cdot \frac{2010}{2011}$$

$$= \frac{2010 \cdot 10001}{2011 \cdot 10001} \cdot \frac{2010}{2011} = \frac{2010 \cdot 2010}{2011 \cdot 2011} = \frac{2010 \cdot 10001}{2011 \cdot 10001} = \frac{2010}{2011} = \alpha$$

Σωστό το Δ

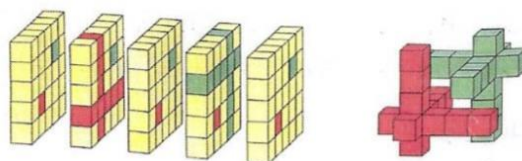
Ερώτηση 7

Ο Ευπαλίνος έκτισε έναν $5 \times 5 \times 5$ κύβο χρησιμοποιώντας 125 μικρούς κύβους. Μετά *έβγαλε* μερικούς μικρούς κύβους αρχίζοντας από τα μαυρισμένα σημεία ώστε να σχηματιστούν 6 τούνελ που διασχίζουν πέρα ως πέρα τον μεγάλο κύβο. Το σχήμα δεξιά δείχνει το τελικό αποτέλεσμα. Πόσους μικρούς κύβους *έβγαλε* ο Ευπαλίνος;



- A) 39 B) 32 Γ) 29 Δ) 26 E) 23

Λύση



Απλά και Κατανοητά η Γνώση

Τα 6 τούνελ μπορούν να χωριστούν σε 2 ομάδες που δεν έχουν κοινά σημεία. Στο σχήμα δεξιά είναι οι κόκκινοι και οι πράσινοι κύβους.

Οι κόκκινοι κύβους είναι 13 και οι πράσινοι κύβους επίσης 13.

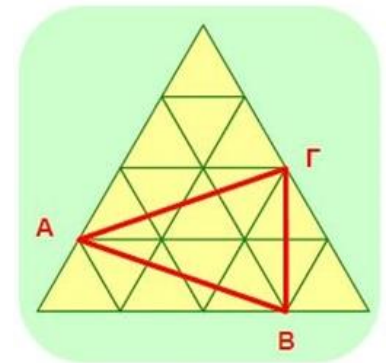
Άρα συνολικά έχουμε 26 κύβους.

Σωστό το Δ

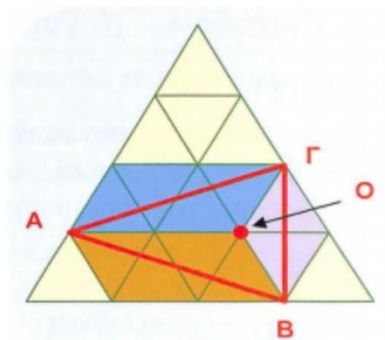
Ερώτηση 8

Το μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο αποτελείται από 16 πράσινα τριγωνάκια, το κάθε ένα από τα οποία έχει εμβαδόν 1 m^2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του κόκκινου τριγώνου ΑΒΓ;

- A) 5 m^2 B) $5,5 \text{ m}^2$ Γ) 6 m^2 Δ) $6,5 \text{ m}^2$
E) κανένα από τα προηγούμενα



Λύση



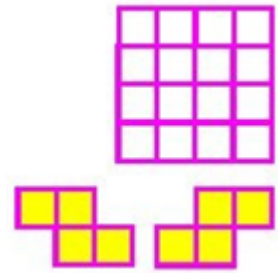
Το τρίγωνο ΑΒΓ χωρίζεται σε 3 επιμέρους τρίγωνα, τα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΑΓ. Το κάθε τρίγωνο έχει εμβαδόν όσο το μισό του χρωματισμένου παραλληλογράμμου. Το κάθε παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 10 m^2 .

Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $\frac{10}{2} = 5 \text{ m}^2$

Σωστό το Α

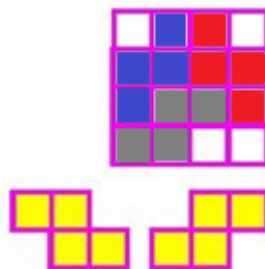
Ερώτηση 9

Η Λητώ έχει ένα 4x4 τετραγωνισμένο χαρτί. Θέλει με ένα ψαλίδι να κόψει το χαρτί κατά μήκος των γραμμών για να φτιάξει αντίγραφα των δύο κίτρινων σχημάτων που εικονίζονται. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός τέτοιων σχημάτων που μπορεί να φτιάξει;



- A) 1 B) 2 Γ) 3 Δ) 4 E) 5

Λύση



Τα συνολικά τετράγωνα είναι 16 και κάθε σχήμα που κόβει η Λητώ έχει 4 τετράγωνα. Άρα θα φτιάξει το πολύ 4 τέτοια σχήματα. Δεν μπορεί όμως να φτιάξει 4^ο σχήμα οπότε θα φτιάξει 3 σχήματα.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 10

Γράφουμε στη σειρά τους διαδοχικούς αριθμούς 216, 217, 218,.....,682, 683, 684. Ποιος από αυτούς τους αριθμούς έχει την εξής ιδιότητα: "οι αριθμοί στην παραπάνω σειρά που είναι μεγαλύτεροι του είναι διπλάσιοι από αυτούς που είναι μικρότεροι του".

- A) 341 B) 371 Γ) 372 Δ) 373 E) 374

Λύση

Έστω x ο άγνωστος αριθμός. Τότε 216, 217, 218, ..., $x - 1$, x , $x + 1$, $x + 2$, ..., 684. Οι αριθμοί που βρίσκονται δεξιά του x είναι $684 - x$ και οι αριθμοί από αριστερά $x - 1 - 215$. Άρα λύνουμε την εξίσωση:

$$684 - x = 2(x - 1 - 215) \Leftrightarrow 684 - x = 2x - 2 - 430 \Leftrightarrow$$

Απλά και Κατανοητά η Γνώση

$$3x = 1118 \Leftrightarrow$$

$$x = 372$$

Σωστό το Γ

Ερώτηση 11

Ο Απόλλωνας κάνει μαθήματα κιθάρας δύο φορές την εβδομάδα και η Άρτεμις κάνει μαθήματα κιθάρας μία φορά κάθε δυο βδομάδες. Αν ξεκίνησαν συγχρόνως τα μαθήματα, σε πόσες βδομάδες ο Απόλλωνας θα έχει κάνει 15 περισσότερα μαθήματα από την Άρτεμη;

- A) 30 B) 25 Γ) 20 Δ) 15 E) 10

Λύση

Την 1^η εβδομάδα ο Απόλλωνας έχει 2 μαθήματα και η Άρτεμις 1.

Την 2^η εβδομάδα ο Απόλλωνας έχει 4 μαθήματα και η Άρτεμις 2.

Την 3^η εβδομάδα ο Απόλλωνας έχει 6 μαθήματα και η Άρτεμις 3.

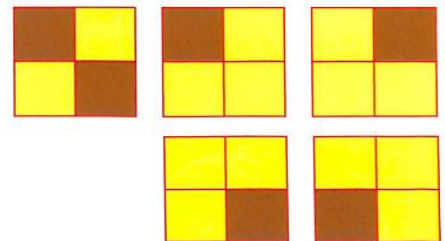
.....

Την 15^η εβδομάδα ο Απόλλωνας έχει 30 μαθήματα και η Άρτεμις 15.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 12

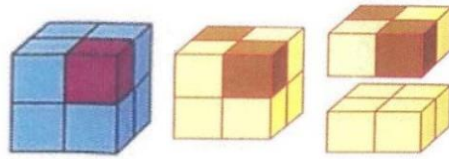
Έχουμε 8 μικρούς κύβους ίδιου μεγέθους. Κάποιοι είναι καφετί χρώμα ενώ οι υπόλοιποι είναι κίτρινοι. Με τους κύβους κατασκευάζουμε έναν πιο μεγάλο κύβο. Οι πέντε έδρες του μεγάλου κύβου φαίνονται στην εικόνα. Ποια είναι η έκτη έδρα του;



- A) B) Γ) Δ) E)



Λύση



Ο κάθε μικρός κύβος είναι σε κάποια γωνία του μεγάλου κύβου. Άρα βλέπουμε τις 3 έδρες του.

Τα καφετί τετράγωνα στις 5 έδρες του μεγάλου κύβου που μας δίνονται είναι 6 (πολλαπλάσιο του 3).

Άρα η κατασκευή μας έχει είτε 2 καφετί κύβους είτε 3 γιατί μπορεί να υπάρχουν και άλλα 3 στην κρυμμένη έδρα.

Αν οι καφετί κύβοι είναι 2 τότε πρέπει να φαίνονται 6 καφετί τετράγωνα. Άλλα βλέπουμε 6 οπότε στην κρυμμένη έδρα πρέπει να μην υπάρχει καφετί τετράγωνο.

Σωστό το Α