

17<sup>ο</sup> φύλλο - Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών

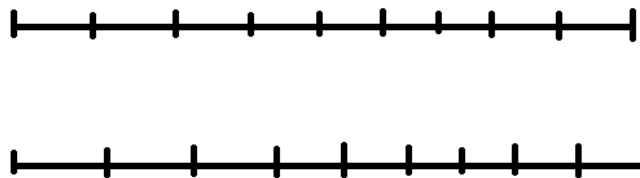
Απαντήσεις

Ερώτηση 1

Ο κ. Γόρδιος ήθελε να κόψει ένα κομμάτι σπάγκου σε 9 ίσα μέρη, γι' αυτό σημείωσε πάνω στον σπάγκο τα σημεία κοπής. Η κα. Ρωξάνη ήθελε να κόψει το ίδιο κομμάτι σπάγκου σε 8 ίσα μέρη, οπότε σημείωσε και αυτή πάνω στον ίδιο σπάγκο τα δικά της σημεία κοπής. Τελικά τον σπάγκο τον έκοψε ο κ. Αλέξανδρος. Για να τον κόψει χρησιμοποίησε όλα τα σημειωμένα σημεία. Πόσα κομμάτια σπάγκου πήρε ο κ. Αλέξανδρος;

- A) 15      B) 16      Γ) 17      Δ) 18      E) 19

Λύση

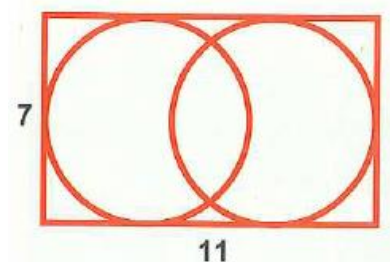


Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι ο σπάγκος έχει μήκος 72 μονάδες οπότε ο κ. Γόρδιος σημείωσε τα σημεία σε απόσταση 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64 μονάδες από το ένα άκρο και η κυρία Ρωξάνη σε απόσταση 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63. Παρατηρούμε ότι τα σημεία κοπής δεν συμπίπτουν. Αφού τα σημειωμένα σημεία είναι 15, ο Αλέξανδρος θα πάρει 16 κομμάτια σπάγκου.

**Σωστό το B**

Ερώτηση 2

Το σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 7x11. Μέσα στο ορθογώνιο βρίσκονται δύο κύκλοι που ο καθένας εφάπτεται σε τρεις πλευρές του

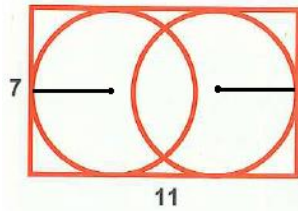


Απλά και Κατανοητά η Γνώση

ορθογωνίου. Πόση είναι η απόσταση των κέντρων των κύκλων;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      Ε) 5

### Λύση

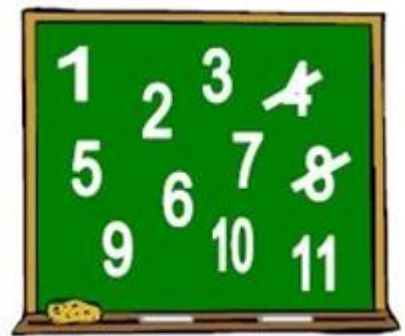


Από το σχήμα, μπορούμε να δούμε ότι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των 2 κύκλων είναι  $11 \text{ cm} - \text{τη διάμετρο κάθε κύκλου}$ . Αφού η διάμετρος είναι  $7 \text{ cm}$ . Η απόσταση μεταξύ των κέντρων είναι  $11 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ .

Σωστό το Δ

### Ερώτηση 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι φυσικοί αριθμοί από το 1 μέχρι το 10. Ένας μαθητής έσβησε δύο αριθμούς και αμέσως μετά έγραψε στον πίνακα το άθροισμα τους μειωμένο κατά 1. (π.χ. αν είχε σβήσει τους 4 και 8, θα έγραφε τον 11). Μετά ένας άλλος μαθητής έσβησε δύο από τους αριθμούς που άφησε στον πίνακα ο πρώτος, και έγραψε το άθροισμά τους μειωμένο κατά 1. Η διαδικασία αυτή συνεχίστηκε μέχρι που στο τέλος έμεινε στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Ποιος είναι ο αριθμός που έμεινε;



- A) κάποιος αριθμός μικρότερος του 11      B) 11      Γ) 46  
 Δ) κάποιος αριθμός μεγαλύτερος του 46      Ε) κανένα από τα προηγούμενα

### Λύση

Κάθε φορά που σβήνουμε 2 αριθμούς από τον πίνακα και γράφουμε έναν, το πλήθος των αριθμών στον πίνακα μειώνεται κατά 1 κάθε φορά.

Αφού στο τέλος έμεινε ένας αριθμός, η διαδικασία κρατάει 9 γύρους.

Απλά και Κατανοητά η Γνώση

Σε κάθε γύρο, το άθροισμα όλων των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μειώνεται κατά 1.

Π.χ. Αν σβήσουμε τους 4, 8 και στην θέση τους γράψουμε το 11, το άθροισμα μειώθηκε κατά  $(4 + 8) - 11 = 1$ .

Άρα μετά από 9 γύρους θα έχουμε:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) - 9 = 46$$

Συνεπώς ότι και να κάνουμε, θα έχουμε πάντα 46.

Σωστό το Γ

#### Ερώτηση 4

Κάθε αστερίσκος (\*) στην διπλανή ισότητα πρέπει να αντικατασταθεί είτε με ένα + ή με ένα - ώστε να γίνει σωστή η ισότητα. Ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός αριθμός από \* που πρέπει αντικατασταθούν με +;

$$2 * 1 * 5 * 2 * 1 * 5 * 2 * 1 * 5 = 0$$

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      E) 5

#### Λύση

Μια κατάλληλη λύση είναι η:

$$2 - 1 + 5 - 2 - 1 + 5 - 2 - 1 - 5 = 0$$

Αν πάμε τους όρους με τα -, στο άλλο μέλος, θα έχουμε:

$$2 + 5 + 5 = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 5$$

Θέλουμε το αριστερό μέλος να έχει όσο λιγότερους όρους γίνεται. Όλοι οι αριθμοί έχουν άθροισμα:

$$2 + 1 + 5 + 2 + 1 + 5 + 2 + 1 + 5 = 24$$

Συνεπώς κάθε μέλος πρέπει να έχει άθροισμα  $24:2=12$ .

Το 12, το γράφουμε ως  $2+5+5$ , οπότε το άλλο μέλος γράφεται ως  $1+2+1+2+1+5$ .

Άρα ο μικρότερος αριθμός από + είναι δύο.

Σωστό το B

### Ερώτηση 5

Οι γωνίες  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$  ενός τριγώνου είναι τρεις διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί με  $\hat{A} < \hat{B} < \hat{\Gamma}$ . Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να έχει το άθροισμα  $\hat{A} + \hat{\Gamma}$ ;

- A)  $61^\circ$       B)  $90^\circ$       Γ)  $91^\circ$       Δ)  $120^\circ$       E)  $121^\circ$

### Λύση

Αν ίσχυε  $\hat{A} + \hat{\Gamma} \leq 90^\circ$  τότε ειδικά η  $\Gamma$  θα ήταν μικρότερη από  $90^\circ$  αφού  $\hat{\Gamma} < \hat{A} + \hat{\Gamma} \leq 90^\circ$ . Επίσης τότε η  $B$  θα ήταν  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  ή περισσότερο. Με άλλα λόγια θα ήταν  $\hat{B} \geq 90^\circ > \hat{\Gamma}$ , που δεν γίνεται γιατί υποθέσαμε ότι η  $\hat{\Gamma}$  είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις γωνίες. Τελικά  $\hat{A} + \hat{\Gamma} \geq 91^\circ$ , και αφού υπάρχει τρίγωνο με  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 91^\circ$ , αυτή είναι και η απάντησή μας.

Σωστό το Γ

### Ερώτηση 6

Πάνω σε μία ευθεία βρίσκονται έντεκα σημεία, από αριστερά προς τα δεξιά. Το άθροισμα των αποστάσεων του πρώτου σημείου από όλα τα άλλα είναι 2018. Το άθροισμα των αποστάσεων του δεύτερου σημείου από όλα τα άλλα, συμπεριλαμβανομένου του πρώτου, είναι 2000. Πόση είναι η απόσταση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου σημείου;

- A) 1      B) 2      Γ) 3      Δ) 4      E) 5

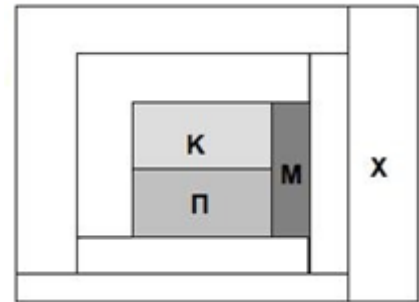
### Λύση

Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των 2 πρώτων σημείων είναι  $x$  cm. Θεωρούμε τα υπόλοιπα 9 σημεία. Το άθροισμα των αποστάσεων τους από το πρώτο σημείο είναι  $(2018 - x)$  cm και το άθροισμα των αποστάσεων τους από το δεύτερο σημείο είναι  $x$  cm λιγότερο από την απόσταση από το πρώτο σημείο. Συνεπώς, όταν αθροίσουμε τις αποστάσεις των 9 σημείων παίρνουμε  $9x = (2018 - x) - (2000 - x)$  και συνεπώς  $9x = 18$ . Άρα  $x = 2$  και η απόσταση μεταξύ του πρώτου και δεύτερου σημείου είναι 2 cm.

Σωστό το B

### Ερώτηση 7

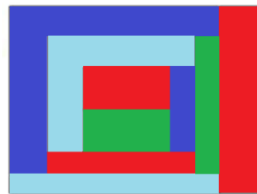
Ο χάρτης δίπλα πρέπει να σχεδιαστεί με τέσσερα χρώματα: κόκκινο (Κ), πράσινο (Π), μπλε (Μ) και γαλάζιο (Γ). Οι περιοχές που έχουν κοινό σύνορο πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα. Μερικές περιοχές έχουν ήδη χρωματιστεί. Τι χρώμα θα βαφτεί η περιοχή X;



- A) κόκκινο   B) πράσινο   Γ) μπλε   Δ) γαλάζιο  
 E) δεν μπορούμε να ξέρουμε

### Λύση

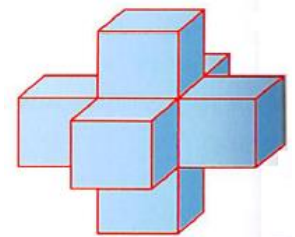
Η περιοχή X θα βαφεί κόκκινη σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Σωστό το A

### Ερώτηση 8

Έχουμε επτά ζάρια τα οποία κολλάμε για να φτιάξουμε την κατασκευή που δείχνει το σχήμα. Κάθε δύο έδρες που έχουμε κολλήσει μεταξύ τους, έχουν πάνω τους τον ίδιο αριθμό. Πόσο είναι το άθροισμα όλων των αριθμών στην εξωτερική επιφάνεια της κατασκευής;



- A) 24   B) 90   Γ) 95   Δ) 105   E) 126

### Λύση

Κάθε ζάρι έχει άθροισμα αριθμών  $1+2+3+4+5+6=21$ . Αν δεν υπήρχαν κολλημένα ζάρια, το άθροισμα όλων των αριθμών στα 7 ζάρια θα ήταν  $7 \cdot 21$ . Στο κεντρικό ζάρι έχουν σκεπαστεί όλες οι έδρες. Μαζί με αυτές σκεπάστηκαν από μία φορά άλλοι τόσοι αριθμοί.

Άρα το άθροισμα όλων των αριθμών σε 5 ζάρια. Το ζητούμενο άθροισμα είναι  $5 \cdot 21 = 105$

Σωστό το Δ

### Ερώτηση 9

Το άθροισμα των ψηφίων ενός πενταψήφιου αριθμού είναι 44. Πόσο είναι το γινόμενο των ίδιων πέντε ψηφίων;

- A)  $2^3 \cdot 3^8$     B)  $2^3 \cdot 9^3$     Γ)  $8 \cdot 4^9$     Δ)  $8 \cdot 3^4$   
E) κανένα από τα προηγούμενα

#### Λύση

Αν είναι το  $2^3 \cdot 5^8$  τότε:  $2 \times 3 + 3 \times 8 = 6 + 24 = 30$  Άτοπο

Αν είναι το  $2^3 \cdot 9^3$  τότε:  $2 \times 3 + 9 \times 3 = 6 + 27 = 33$  Άτοπο

Αν είναι το  $8 \cdot 4^9$  τότε:  $8 + 9 \times 4 = 8 + 36 = 44$  Δεκτό

Αν είναι το  $8 \cdot 3^4$  τότε:  $8 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$  Άτοπο

Σωστό το Γ

### Ερώτηση 10

Τρεις φυσικοί αριθμοί  $x, y, z$  ικανοποιούν τις ισότητες  $x \cdot y = 14, y \cdot z = 10$  και  $z \cdot x = 35$ . Με πόσο ισούται το  $x + y + z$ ;

- A) 10    B) 12    Γ) 14    Δ) 16    E) 18

#### Λύση

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες  $x \cdot y = 14, y \cdot z = 10$  και  $z \cdot x = 35$  μεταξύ τους. Έχουμε ότι:

$$x^2 y^2 z^2 = 14 \cdot 10 \cdot 35$$

Επομένως:

$$(xyz)^2 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 7 \cdot 5)^2$$

Συνεπώς  $xyz = 2 \cdot 7 \cdot 5$ , Συγκρίνοντας με την  $yz = 10$  έχουμε  $x = 7$ . Όμοια, από τη σχέση  $xyz = 2 \cdot 7 \cdot 5$  και την  $xz = 35$  βρίσκουμε ότι  $y = 7$  και  $z = 5$ . Συνεπώς  $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$ .

Σωστό το Γ

### Ερώτηση 11

Σε ένα χαρτί είναι γραμμένοι οι αριθμοί 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 και 16. Θέλουμε να σβήσουμε δύο αριθμούς χωρίς να αλλάξει ο μέσος όρος των υπόλοιπων. Ποιους δύο αριθμούς πρέπει να σβήσουμε;

- A) τους 12 και 17   B) τους 5 και 17   Γ) τους 9 και 16   Δ) τους 10 και 12  
E) τους 14 και 10

#### Λύση

Οι αριθμοί 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12, 16 έχουν μέσο όρο:

$$\frac{17 + 13 + 5 + 10 + 14 + 9 + 12 + 16}{8} = 12$$

Αν σβήσουμε τους αριθμούς 14, 10 θα έχουμε μέσο όρο:

$$\frac{17 + 13 + 5 + 12 + 16}{6} = 12$$

**Σωστό το Ε**

### Ερώτηση 12

Στον δρόμο που μένω υπάρχουν 17 σπίτια. Η αρίθμηση αρχίζει από το 1 και είναι η συνηθισμένη. Το σπίτι μου είναι το τελευταίο στην πλευρά με τους ζυγούς αριθμούς, και έχει αριθμό 12. Το σπίτι του ξαδέλφου μου είναι το τελευταίο στην πλευρά με τους μονούς αριθμούς. Τι αριθμό έχει το σπίτι του ξαδέλφου μου;

- A) 5      B) 7      Γ) 13      Δ) 17      E) 21

#### Λύση

Η μία πλευρά του δρόμου έχει σπίτια με αρίθμηση ζυγό αριθμό. Δηλαδή σπίτια με αριθμό 2,4,6,8,10,12 (εφόσον το τελευταίο σπίτι από αυτή την πλευρά έχει αριθμό 12).

Η άλλη πλευρά του δρόμου έχει σπίτια με αρίθμηση μονό αριθμό. Δηλαδή σπίτια με αριθμό 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21 (ώστε συνολικά τα σπίτια με μονό και ζυγό αριθμό να είναι 17 σύμφωνα με την εκφώνηση).

Άρα από τους μονούς αριθμούς ο τελευταίος είναι το 21.

**Σωστό το Ε**

Απλά και Κατανοητά η Γνώση