Επίπεδο 3

Level 3: Α' & Β' Γυμνασίου

19ο φύλλο - Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών

Απαντήσεις

Ερώτηση 1

Πέντε φίλες, η Άννα, η Βίκυ, η Γιάννα, η Δανάη και η Έλλη συγκρίνανε το ύψος τους. Διαπιστώσανε ότι:

- η Άννα είναι η πιο κοντή από όλες
- η Δανάη είναι πιο ψηλή από την Βίκυ αλλά πιο κοντή από την Έλλη

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι *σίγουρα* λάθος;

Α) η Γιάννα είναι πιο ψηλή από την Άννα

Β) η Γιάννα είναι πιο ψηλή από την Έλλη

Γ) η Βίκυ είναι πιο κοντή από την Δανάη

Δ) η Βίκυ είναι πιο ψηλή από την Έλλη

Ε) η Έλλη είναι πιο ψηλή από την Βίκυ

Λύση

Έστω:

Α: το ύψος της Άννας

Β: το ύψος της Βίκυς

Γ: το ύψος της Γιάννας

Δ: το ύψος της Δανάης

Ε: το ύψος της Έλλης

Η Άννα είναι πιο κοντή από όλες. Οπότε:

$$A < B + \Gamma + \Delta + E$$

Η Δανάη είναι πιο ψηλή από την Βίκυ. Οπότε:

$$B < \Delta$$

Η Δανάη είναι πιο κοντή από την Έλλη. Οπότε Δ<Ε.

Άρα Β+Δ<Δ+Ε οπότε Β<Ε οπότε η Έλλη είναι πιο ψηλή από την Βίκυ.

Σωστό το Ε

Ερώτηση 2

Η σάλτσα της κυρίας Μαγείρισσας αποτελείται από λάδι, ξύδι και νερό. Το λάδι είναι διπλάσιο από το ξύδι και τριπλάσιο από το νερό. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό για την σάλτσα;

Α) Περιέχει περισσότερο ξύδι από λάδι

Β) Το λάδι είναι περισσότερο από το ξύδι και το νερό μαζί

Γ) Το ξύδι είναι περισσότερο από το λάδι και το νερό μαζί

Δ) Το νερό είναι περισσότερο από το ξύδι και το λάδι μαζί

Ε) Το ξύδι είναι λιγότερο από το νερό

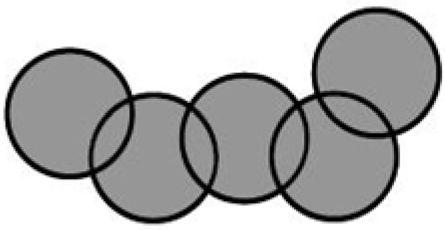
Λύση

Για κάθε κουταλιά λάδι έχουμε 1/2 της κουταλιάς ξύδι και 1/3 της κουταλιάς νερό. Άρα σε κάθε 6 κουταλιές λάδι έχουμε 3 κουταλιές ξύδι και 2 νερό. Άρα σε κάθε 6 κουταλιές ξύδι έχουμε 5 κουταλιές ξύδι και το νερό μαζί.

Σωστό το Β

Ερώτηση 3

Το εμβαδόν του κάθε κύκλου στο σχήμα είναι 8 m^2. Το κοινό εμβαδόν δύο γειτονικών κύκλων είναι 1 m^2. Πόσο είναι το εμβαδόν της γκρι περιοχής που σκεπάζουν οι πέντε κύκλοι;



Α) 32 m^2 Β) 35 m^2 Γ) 36 m^2 Δ) 38 m^2 Ε) 39 m^2

Λύση

Έχουμε στο σχήμα 5 κύκλους ο καθένας εμβαδού 8 m^2. Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι $5 \cdot 8 = 40\ m^2$. Έχουμε όμως και 4 κοινές περιοχές με εμβαδόν 1 m^2. Αυτές έχουν συνολικό εμβαδόν 4 m^2.

Άρα το εμβαδόν της γκρι περιοχής είναι $40 - 4 = 36\ m^2$.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 4

Ένα περίεργο κομπιουτεράκι μπορεί να κάνει μόνο τα εξής: αν γράψουμε έναν αριθμό στην οθόνη του τότε, είτε α) τον πολλαπλασιάζει επί 2 ή επί 3, είτε β) τον υψώνει στην δύναμη 2 ή στην δύναμη 3. Αρχίζοντας από τον αριθμό 15, ποιος από τους ακόλουθους αριθμούς μπορεί να προκύψει χρησιμοποιώντας το περίεργο κομπιουτεράκι 5 φορές διαδοχικά;

Α) $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^6$ Β) $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$ Γ) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ Δ) $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$
Ε) $2 \cdot 3^2 \cdot 5^6$

Λύση

Ο αριθμός 15 γράφεται ως 5×3.

Στο 1ο πάτημα στο κομπιουτεράκι έχουμε: 3×5^2

Στο 2ο πάτημα στο κομπιουτεράκι έχουμε: $3 \times (5^2)^2$

Στο 3ο πάτημα στο κομπιουτεράκι έχουμε: $2 \times 3 \times 5^4$

Στο 4ο πάτημα στο κομπιουτεράκι έχουμε: $(2 \times 3)^2 \times 5^4$

Στο 5ο πάτημα στο κομπιουτεράκι έχουμε: $((2 \times 3)^2)^3 \times 5^4$

Άρα ο αριθμός γράφεται ως $2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 5

Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου

7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7 (είκοσι εφτάρια);

Α) 0 Β) 1 Γ) 3 Δ) 7 Ε) 9

Λύση

Το γινόμενο 7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7x7 μπορεί να χωριστεί σε 4 γινόμενα των 7x7x7x7x7. Δηλαδή:

(7x7x7x7x7)x(7x7x7x7x7)x(7x7x7x7x7)x(7x7x7x7x7)

Ισχύει ότι 7x7x7x7x7=16807 δηλαδή το διπλανό γινόμενο τελειώνει σε 7.

Συνεπώς το αρχικό γινόμενο θα μπορεί να γραφεί ως:

16807x16807x16807x16807.

Όμως ισχύει ότι 7x7x7x7=2401, οπότε το ζητούμενο γινόμενο θα τελειώνει σε 1 χωρίς να κάνουμε τις πράξεις.

Σωστό το Β

Ερώτηση 6

Μια ομάδα ποδοσφαίρου έπαιξε τρεις αγώνες. Στον πρώτο αγώνα έχασε, στον δεύτερο ήλθε ισοπαλία και στον τρίτο κέρδισε. Συνολικά η ομάδα έβαλε 3 γκολ και δέχτηκε ένα. Πόσο ήταν το σκορ του αγώνα που κέρδισε;

Α) $2-0$ Β) $3-0$ Γ) $1-0$ Δ) $4-1$

Ε) $0-1$

Λύση

Αφού η ομάδα έχασε στον πρώτο αγώνα, αυτό σημαίνει ότι δέχτηκε το μοναδικό γκολ σε αυτόν τον αγώνα. Δηλαδή έχασε με 1-0.

Στον δεύτερο αγώνα εφόσον έφερε ισοπαλία το σκορ ήταν 0-0.

Στον τρίτο αγώνα που η ομάδα κέρδισε, το σκορ ήταν 3-0 διότι έβαλε όλα τα γκολ σε αυτόν τον αγώνα χωρίς να δεχτεί άλλο γκολ.

Σωστό το Β

Ερώτηση 7

Τέσσερα ίδια κουτιά με σοκολατάκια έχουν 48 περισσότερα σοκολατάκια από ότι ένα από αυτά τα κουτιά. Πόσα σοκολατάκια έχει το κάθε κουτί;

Α)12 Β)16 Γ) 24 Δ) 44

Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Έστω ότι το ένα από αυτά τα κουτιά έχει x σοκολατάκια. Τότε αφού τα τέσσερα ίδια κουτιά με σοκολατάκια έχουν 48 περισσότερα σοκολατάκια από ότι ένα από αυτά τα κουτιά, θα ισχύει η εξίσωση:

$$4x = x + 48 \Longrightarrow$$

$$3x = 48 \Longrightarrow$$

$$x = 16$$

Σωστό το Β

Ερώτηση 8

Ο Ευκλείδης αντικατέστησε όλα τα οκτάρια στις παρακάτω παραστάσεις με επτάρια. Σε ποια από τις περιπτώσεις θα βρει το ίδιο τελικά αποτέλεσμα είτε κάνει τις σημειωμένες πράξεις με οκτάρια είτε με επτάρια;

Α) $\frac{8+8}{8}+8$ Β) $\frac{8x(8+8)}{8}$ Γ) $8+8-8+8$

Δ) $(8+8-8)\times 8$ Ε) $\frac{8+8-8}{8}$

Λύση

Για το Ε ισχύει αν κάνουμε τις πράξεις με οκτάρια:

$$\frac{8+8-8}{8}=\frac{8}{8}=1$$

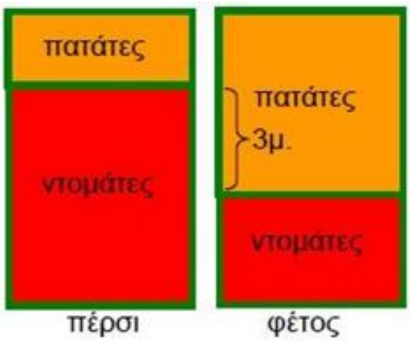
Ενώ αν κάνουμε τις πράξεις με επτάρια:

$$\frac{7+7-7}{7}=1$$

Σωστό το Ε

Ερώτηση 9

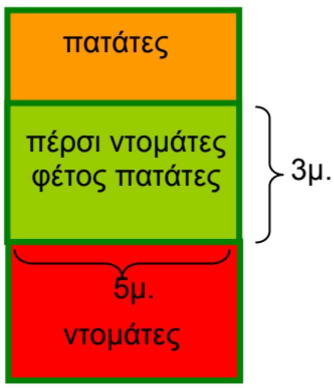
Ο κύριος Κηπουρός καλλιεργεί πατάτες και ντομάτες στον κήπο του. Φέτος άλλαξε το μέρος του κήπου όπου είχε πατάτες και από ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τα έκανε τετράγωνο μεγαλώνοντας την μία πλευρά κατά 3 μέτρα. Το αποτέλεσμα ήταν να μικρύνει κατά 15 τ.μ. το μέρος του κήπου με τις ντομάτες. Πόσο ήταν πέρσι το εμβαδόν του μέρους του κήπου με τις πατάτες;



Α) 5 τ.μ. Β) 9 τ.μ. Γ) 10 τ.μ. Δ) 15 τ.μ. Ε) 18 τ.μ.

Λύση

Το μέρος του κήπου που άλλαξε είναι το πράσινο στο σχήμα. Η μία του διάσταση είναι, κατά το πρόβλημα, 3 μέτρα. Εφόσον το εμβαδόν το είναι 15 τ.μ., σημαίνει ότι η άλλη του διάσταση είναι 5 μέτρα. Δηλαδή φέτος το μέρος του κήπου με τις πατάτες, που ξέρουμε ότι είναι τετράγωνο με μία διάσταση 5 μέτρων, έχει



εμβαδόν 5×5 =25 τ.μ. Άρα πέρσι, που ήταν 15 τ.μ. λιγότερα από φέτος, είχε εμβαδόν $25 - 15 = 10$ τ.μ.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 10

Ένα καγκουρό κρατάει 5 οδοντογλυφίδες. διαφορετικού μήκους. Η κάθε οδοντογλυφίδα έχει μήκος 2 cm περισσότερο από την αμέσως πιο μικρή της. Οι δύο πιο μικρές οδοντογλυφίδες έχουν μαζί μήκος όσο η πιο μεγάλη. Τι μήκος έχουν συνολικά όλες μαζί οι οδοντογλυφίδες;

Α) 6 cm Β) 14 cm Γ) 22 cm Δ) 44 cm Ε) 50 cm

Λύση

Αν x cm το μήκος της πιο μικρής οδοντογλυφίδας, τότε τα μήκη των υπόλοιπων είναι x +2 , x +4 , x +6 και x+8 . Το δεδομένο είναι ότι:

$$x + (x + 2) = x + 8$$

Λύνοντας την εξίσωση θα βρούμε $x = 6$. Άρα τα μήκη τους είναι 6, 8, 10, 12 και 14 cm. Το άθροισμα αυτών είναι 50 cm.

Σωστό το Ε

Ερώτηση 11

Στο πάρτι των καγκουρό βρέθηκαν λιγότερα από 50 καγκουρό. Κάποια στιγμή χόρευαν ορισμένα από τα καγκουρό σε ζευγάρια (ένα αρσενικό με ένα θηλυκό). Συγκεκριμένα, τα $\frac{3}{4}$ των αρσενικών καγκουρό χόρευαν με τα $\frac{4}{5}$ των θηλυκών. Πόσα καγκουρό χόρευαν εκείνη τη στιγμή;

Α) 20 Β) 24 Γ) 30 Δ) 32 Ε) 46

Λύση

Ονομάζουμε α το πλήθος των αρσενικών καγκουρό και θ των θηλυκών που ήταν στο πάρτι. Από το γεγονός ότι κάποια στιγμή χόρευαν τα 3/4 των 16ή 15α=16θ. Επομένως ο αριθμός Α=15α=16θ είναι συγχρόνως πολλαπλάσιο του και 15 και του 16. Άρα είναι πολλαπλάσιο του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλασίου τους. Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο όμως των 15, 16 είναι το $15 \cdot 16$.

Επομένως ο Α είναι ίσος με $15 \cdot 16$ ή $2 \cdot 15 \cdot 16$ ή $3 \cdot 15 \cdot 16$ κλπ . Αν Α=$15 \cdot 16$, τότε $\alpha = 16$ και $\theta = 1$, δηλαδή τα καγκουρό ήταν συνολικά $15 + 16 = 31$. Οι άλλες περιπτώσεις δίνουν συνολικό αριθμό καγκουρό μεγαλύτερο του 50, που δεν ταιριάζει στις υποθέσεις.

Επομένως εκείνη τη στιγμή χόρευαν $\frac{3}{4} \cdot 16 = 12$ αρσενικά και $\frac{4}{5} \cdot 15 = 12$ θηλυκά καγκουρό, σύνολο 24.

Σωστό το Β

Ερώτηση 12

Πόσοι αριθμοί από το 1 μέχρι το 2013^6 είναι τέλεια τετράγωνα;

(Τέλεια τετράγωνα ονομάζονται οι αριθμοί $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$, $16 = 4^2$ και λοιπά).

Α) 4016 Β) 2013^2 Γ) 2013^3 Δ) 2013^4 Ε) 2013^5

Λύση

Τα τέλεια τετράγωνα από το 1 έως έναν αριθμό της μορφής N^2 (δηλαδή μέχρι κάποιο τέλειο τετράγωνο) είναι Ν στο πλήθος. Συγκεκριμένα, είναι οι αριθμοί 1^2, 2^2, 3^2, ..., N^2. Ο αριθμός 2013^6 που μας δόθηκε, είναι τέλειο τετράγωνο επειδή μπορεί να γραφεί ως $(2013^3)^2$. Δηλαδή πρόκειται για τον αριθμό N^2 όπου $N = 2013^3$. Άρα ο αριθμός των τέλειων τετραγώνων είναι $N = 2013^3$.

Σωστό το Γ