

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 + 3x - 4$

ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

iii) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$

ii) $f(x) = |x^2 - 1|$

4. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

ii) $f(x) = \ln x - x$

iii) $f(x) = \eta\mu x + |\eta\mu x|, x \in [0, 2\pi]$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5 + 5x - 6 = 0 \text{ και } 2\sqrt{x} + x - 3 = 0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.