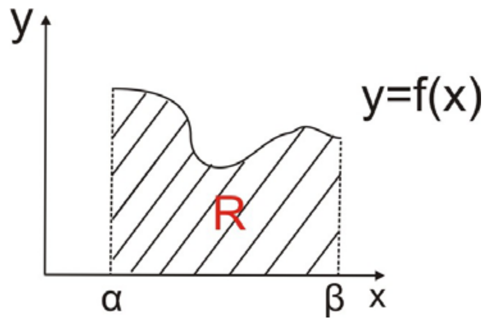
<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ</u>

Α. <u>ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ</u>

Θεωρία

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και R το χωρίο που περκλείεται από το γράφημα της, τον άξονα των x και τις ευθείες x=α και x=β. Το **εμβαδόν E(R) του χωρίου R,** υπολογίζεται ως εξής

(α) Αν $f(x) \geq 0$ τότε $E(R)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$



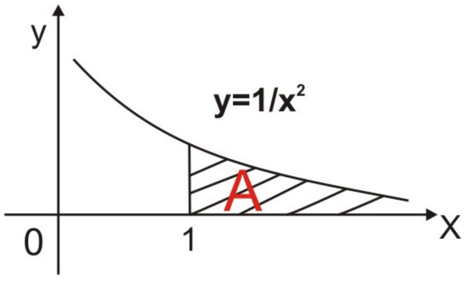
(β) Αν $f(x) \leq 0$ τότε $E(R)= -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$

(γ) Αν η $f(x)$ **<u>δεν</u>** διατηρεί σταθερό πρόσημο τότε $E(R)=\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$

Εφαρμογή 1

Αν Α είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την $y=\frac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και την ευθεία x=1, να βρεθεί το Α.

Λύση



Έχουμε :

$$A=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{1}{x^2}dx \quad (1)$$

Αλλά

$$\int_{1}^{\beta}\frac{1}{x^2}dx=\int_{1}^{\beta}x^{-2}dx=\left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^{\beta}=\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^{\beta}=\left.-\frac{1}{x}\right|_1^{\beta}=-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1}=1-\frac{1}{\beta}$$

Άρα

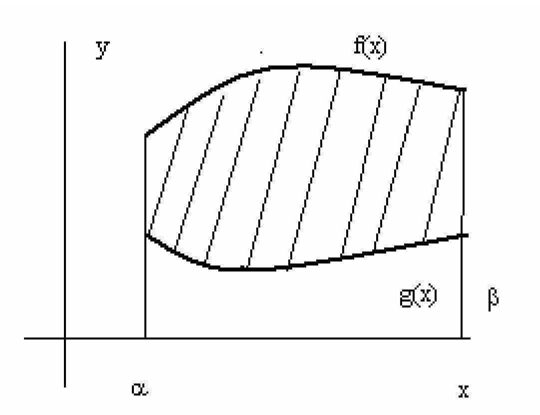
$$(1) \Rightarrow A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\beta \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) dx = 1 - \lim_{\beta \to \infty}\left(-\frac{1}{\beta}\right) = 1 - 0 = 1$$

Παρατήρηση 1.

1. Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, το <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ **<u>δεν</u>** είναι πάντα ίσο με το <u>εμβαδόν του χωρίου «κάτω» από το γράφημα της συνάρτησης</u> f (τα δυό συμπίπτουν αν η συνάρτηση είναι **μη-αρνητική**).

2. Αν το χωρίο R περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων f,g και τις ευθείες x=α και x=β, τότε το **εμβαδόν E(R) του χωρίου R**, υπολογίζεται ως εξής

(α) Αν $f(x) \geq g(x)$ τότε $E(R)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))\,dx$



(β) Αν $f(x) \leq g(x)$ τότε $E(R)=\int_\alpha^\beta (g(x)-f(x))\,dx$

(γ) Αν η διαφορά f(x)-g(x)=h(x) **<u>δεν</u>** διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε

$$E(R)=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,dx=\int_\alpha^\beta |h(x)|\,dx$$

Εφαρμογή 2

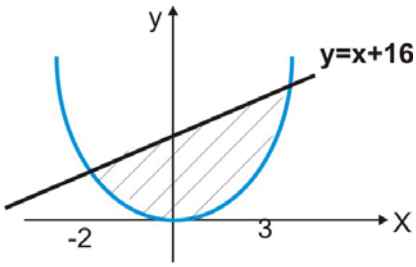
Να βρεθεί το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ & $y = x + 6$

Λύση

Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία :

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= x + 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad ή \quad x = 3$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :



Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία :

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x+6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad ή \quad x = 3$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$\int_{-2}^{3} (x+6)dx \quad - \quad \int_{-2}^{3} x^2 dx =$$

«άνω συνάρτηση» - «κάνω συνάρτηση»

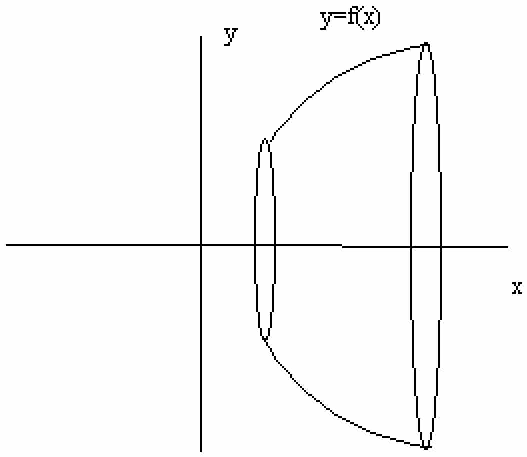
$$= \int_{-2}^{3} \left(x+6-x^2 \right) = \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{3^2}{2} + 6\cdot 3 - \frac{3^3}{3} - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{9}{2} + 18 - 9 - 2 + 12 - \frac{8}{3} = \frac{27}{6} + \frac{114}{6} - \frac{16}{6} = \frac{125}{6}$$

Β. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Θεωρία

Έστω ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και έστω ότι η εν λόγω συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν το χωρίο R που περικλείεται από το γράφημα της τον άξονα των x και τις ευθείες x=α και x=β,



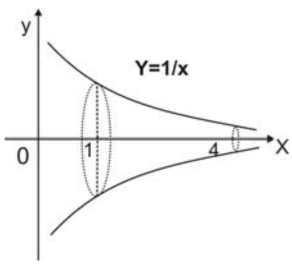
περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x, δημιουργεί ένα στερεό του οποίου ο **όγκος** είναι ίσος με

$$V=\int_0^a \pi f^2(x)dx$$

Εφαρμογή

1. Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της καμπύλης $y=\frac{1}{x}$ $1\le x\le 4$, γύρω από τον άξονα των x.

Λύση



Ο όγκος είναι ίσος με:

$$V=\int_1^4 \pi y^2dx=\int_1^4 \pi\frac{1}{x^2}dx=\int_1^4 \pi x^{-2}dx=\pi\left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^4=-\pi\left.\frac{1}{x}\right|_1^4=-\pi(\frac{1}{4}-1)=\frac{3}{4}\pi$$

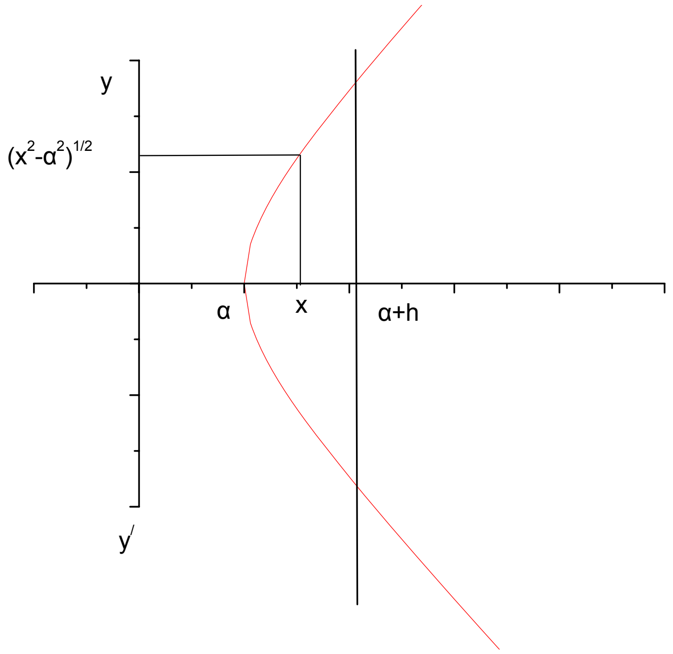
2. Το τμήμα του xy-επιπέδου που περικλείεται από την υπερβολή $x^2-y^2=\alpha^2$, $\alpha>0$, $x>0$ και την ευθεία $x=\alpha+h$, $h>0$ περιστρέφεται γύρω από τον x-άξονα. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού από περιστροφή που δημιουργείται.

Λύση

Ο συγκεκριμένος όγκος V είναι:

$$V=\int_{\alpha}^{\alpha+h}\pi(x^2-\alpha^2)dx=\frac{\pi}{3}\left[(\alpha+h)^3-\alpha^3\right]-\pi\alpha^2h$$

$$=\frac{\pi}{3}(3\alpha^2h+3\alpha h^2+h^3)-\pi\alpha^2h=\frac{\pi h^2}{3}(3\alpha+h)$$



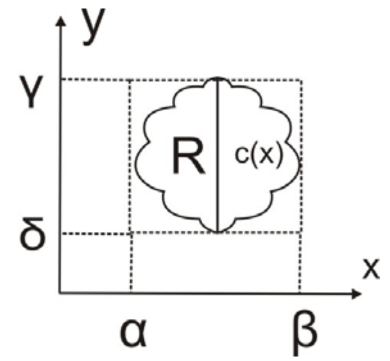
Γ. <u>ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ</u>

Θεωρία

Έστω R ένα χωρίο στο επίπεδο. Φανταστείτε ότι το R καλύπτεται από ένα λεπτό κομμάτι μετάλλου (κάποιας πυκνότητας). Θέλουμε να βρούμε ένα σημείο $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ τέτοιο ώστε αν τοποθετήσουμε ένα ελατήριο κάτω από το κομμάτι του μετάλλου, στο σημείο $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$, το κομμάτι ισορροπεί. Το σημείο $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ καλείται **<u>κέντρο βάρους</u>**

Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα $\bar{x}, \bar{y}$ δίνονται από τις σχέσεις

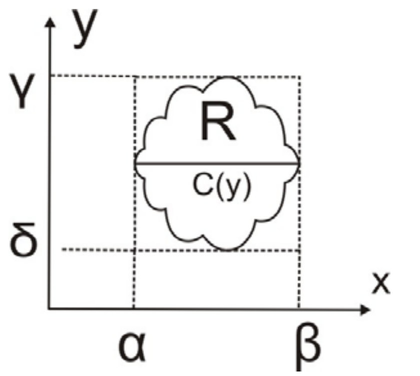
$$\bar{x} = \frac{\int_a^\beta xc(x)dx}{\int_a^\beta c(x)dx} = \frac{\int_a^\beta xc(x)dx}{\text{E}\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu \quad \tau o\upsilon\, R}$$



όπου $c(x) =$ το μήκος της τομής του R με ευθείες παράλληλες στον άξονα των y.

Ανάλογα

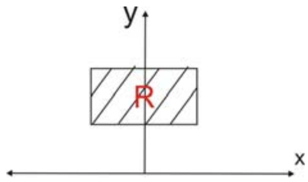
$$\bar{y} = \frac{\int_a^\beta yc(y)dy}{\int_a^\beta c(y)dy} = \frac{\int_a^\beta yc(y)dy}{\text{E}\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu \quad \tau o\upsilon\, R}$$



όπου $c(y)=$ το μήκος της τομής του R με ευθείες παράλληλες στον άξονα των x.

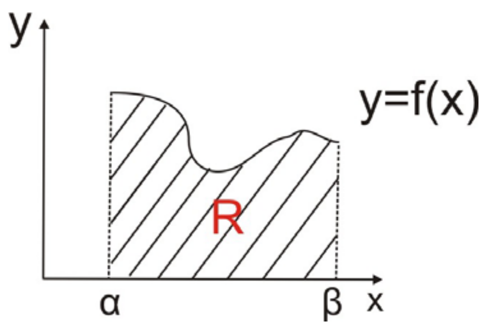
Παρατήρηση

1. Αν το χωρίο R είναι **<u>συμμετρικό</u>** ως προς τον άξονα των y (αντίστοιχα τον άξονα των x) τότε προφανώς $\overline{x}=0$ (αντίστοιχα $\overline{y}=0$)



2. Αν το χωρίο R είναι τέτοιο ώστε:

   Έστω $y=f(x)$ $f(x)\geq 0$ και R είναι το χωρίο που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f και πάνω από τον άξονα των x,



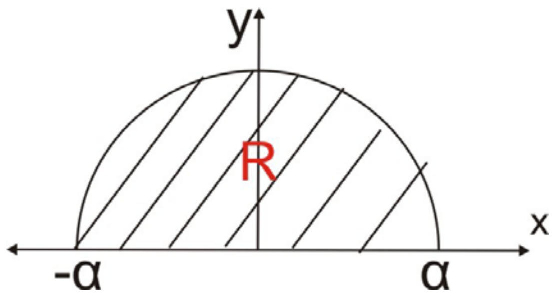
τότε αντί να χρησιμοποιούμε τον τύπο για $\overline{y}$ (και **<u>μόνον</u>** γι’ αυτό) που δίνουμε παραπάνω, χρησιμοποιούμε τον :

$$\overline{y}=\frac{\int_{a}^{\beta}\frac{1}{2}f^{2}(x)dx}{\text{Ε}\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu \quad \tau o\upsilon\, R}$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί το κέντρο βάρους του ημικυκλίου ακτίνας α που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση



Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$ άρα η εξίσωση του ημικυκλίου θα είναι $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα των y, θα έχουμε $\overline{x} = 0$. Για το $\overline{y}$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο που περιγράφεται στην παρατήρηση , δηλαδή

$$\overline{y} = \frac{\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} f^2(x)dx}{\text{Ε}\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu \quad \tau o\upsilon\, R} = \frac{\int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx}{\frac{\pi\alpha^2}{2}} \quad (1)$$

(το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $R = \frac{\pi\alpha^2}{2}$)

Όπου

$$\int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{1}{2}\left(a^2 a - \frac{a^3}{3} - a^2(-a) + \frac{(-a)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(2a^3 - \frac{2a^3}{3}\right) = \frac{2a^3}{3} \quad (2)$$

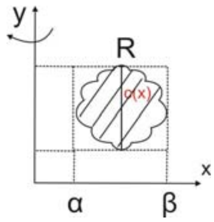
άρα

$$(1) \xrightarrow{(2)} \overline{y} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{\pi\alpha^2}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους είναι $\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = (0, \frac{4\alpha}{3\pi})$

Δ. <u>ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ</u>

Έστω R ένα χωρίο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Η **ροπή αδράνειας** του R **αναφορικά** με τον **άξονα των y,** δίνεται από τον τύπο:

$$A_y = \int_a^\beta x^2 c(x)dx$$

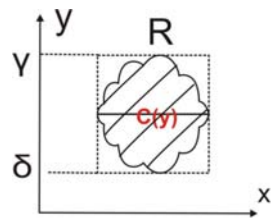
που $c(x) =$ το μήκος της τομής του R με έναν άξονα (ευθεία) παράλληλη στον άξονα των y.

Παρατήρηση

Για να βρούμε την A_y δηλαδή, κάνουμε ότι κάναμε και στην περίπτωση που θέλαμε να βρούμε το $\overline{x}$ για το κέντρο μάζας του R, μόνο που τώρα πολλαπλασιάζουμε το $c(x)$ με x^2 αντί για x (που πολλαπλασιάζαμε εκεί).

Ανάλογα η ροπή αδράνειας του R, αναφορικά με τον άξονα των x δίνεται από τη σχέση :

$$A_x = \int_\gamma^\delta y^2 c(y)dy$$



που $c(y) =$ το μήκος της τομής του R με έναν άξονα (ευθεία) παράλληλη στον άξονα των x.

Και εδώ ισχύει παρατήρηση ανάλογη με την παρατήρηση που δόθηκε για το A_y .

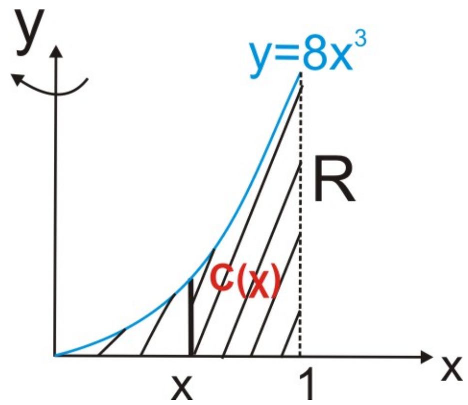
Εφαρμογή

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του χωρίο R που ορίζεται από την $y = 8x^3$, την $y = 0$ κ' $x = 1$

α) αναφορικά με τον άξονα των y β) αναφορικά με τον άξονα των x

Λύση

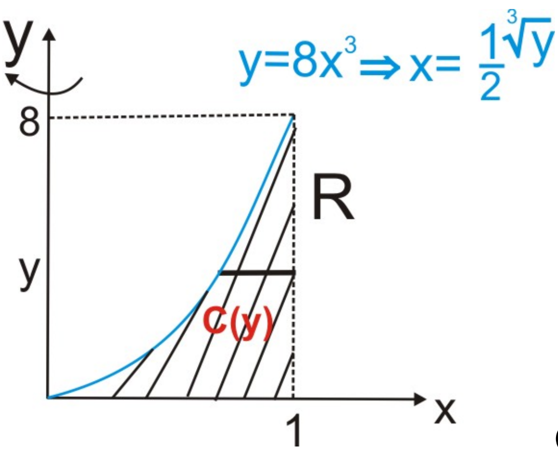
α) αναφορικά με τον άξονα των y



(εδώ $c(x) = 8x^3$)

$$A_y = \int_0^1 x^2 c(x)dx = \int_0^1 x^2 8x^3 dx = 8\int_0^1 x^5 dx = 8\left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}$$

β) αναφορικά με τον άξονα των x



(εδώ $c(y)=1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$)

$$A_x=\int_0^8 y^2 c(y)dy=\int_0^8 y^2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{y}\right)dy=\int_0^8 y^2dy-\frac{1}{2}\int_0^8 y^2\sqrt[3]{y}dy=\int_0^8 y^2dy-\frac{1}{2}\int_0^8 y^{\frac{7}{3}}dy=\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^8-\frac{1}{2}\left.\frac{y^{10/3}}{\frac{10}{3}}\right|_0^8=$$

$$=\frac{8^3}{3}-\frac{3}{20}8^{10/3}=\frac{8^3}{3}-\frac{8^3\cdot 3\cdot 2}{20}=8^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{10}\right)=\frac{8^3}{30}=\frac{256}{15}$$

Ε. <u>ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ</u>

Θεωρία

Αν f μία μη αρνητική συνάρτηση στο $[a,\beta]$, το **εμβαδόν της επιφάνειας** S που γεννιέται από την **περιστροφή** του τμήματος της καμπύλης $y=f(x)$ μεταξύ του x=α και x=β, **γύρω** από τον **x-άξονα** είναι :

$$S=\int_a^\beta 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Παρατήρηση

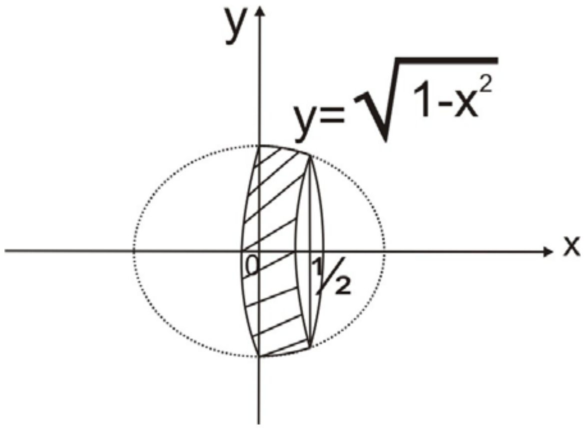
Εάν η καμπύλη είναι της μορφής $x=g(y),\ \ y\in[c,d],\ \ g(y)\geq 0$, τότε **το εμβαδόν της επιφάνειας S** που γεννιέται από την **περιστροφή** της (από το y=c μέχρι το y=d) **γύρω** από τον **y-άξονα** είναι

$$S=\int_c^c 2\pi g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy$$

Εφαρμογή

Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y=\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ γύρω από τον xOx' άξονα

Λύση



Το εμβαδόν της επιφάνειας S που γεννιέται από την περιστροφή του τμήματος της καμπύλης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ είναι ίσο με: $S=\int_0^{1/2} 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

Όπου $f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1-x^2\right)'=\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

άρα $S=\int_0^{1/2} 2\pi\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^{1/2} 2\pi dx=2\pi\, x\Big|_0^{1/2}=\pi$

ΣΤ. <u>ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ</u>

Θεωρία

Αν $y=f(x)$ μία συνάρτηση (καμπύλη) που ορίζεται στο $[a,\beta]$, το **μήκος τόξου** L της $y=f(x)$ από το x=α στο x=β είναι ίσο με :

$$L=\int_a^\beta \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_a^\beta \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Όμοια, εάν η καμπύλη είναι της μορφής $x=g(y)$, $y\in[c,d]$, τότε το μήκος της καμπύλης L από το y=c μέχρι το y=d είναι ίσο με :

$$L=\int_c^d \sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Εφαρμογές

1. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $y=f(x)=x^{3/2}$ από το x=0 στο x=4

Λύση

$$f(x)=x^{3/2} \Rightarrow f'(x)=\left(x^{3/2}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

Το μήκος τόξου L θα είναι

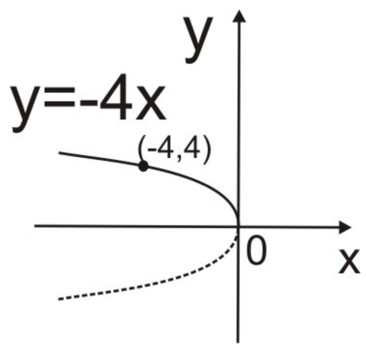
$$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=*=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3}-1\right)$$

* θέτω $u=1+\frac{9}{4}x \Rightarrow du=\frac{9}{4}dx \Rightarrow dx=\frac{4}{9}du$

$$\int\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\int\frac{4}{9}\sqrt{u}du=\frac{4}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{4}{9}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{8}{27}u^{\frac{3}{2}}+c$$

2. Να βρεθεί το μήκος τόξου της $y=-4x$ από το $(-4,4)$ στο $(0,0)$

Λύση



$$y^2=-4x \Rightarrow x=-\frac{y^2}{4} \text{ δηλαδή } x=g(y)=-\frac{y^2}{4} \text{ και } g'(y)=\left(-\frac{y^2}{4}\right)'=-\frac{2y}{4}=-\frac{y}{2}$$

Άρα

$$L=\int_0^4\sqrt{1+\left(g(x)\right)^2}dy=\int_0^4\sqrt{1+\left(-\frac{y}{2}\right)^2}dy=\int_0^4\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dy=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4+y^2}dy=........=*$$

$$=2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$$

* Γιατί: $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

<u>ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ</u>

Θεωρία

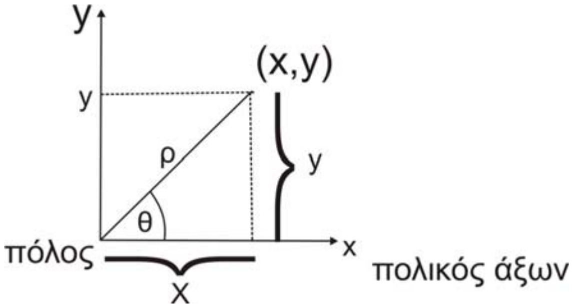
Αν (x, y) οι καρτεσιανές συντεταγμένες σημείου, οι **<u>πολικές του συντεταγμένες</u>** (ρ, θ) συνδέονται με τις καρτεσιανές με τις σχέσεις :

$$x = \rho \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



Εφαρμογές

Α. <u>Γραφική παράσταση</u>

Να γίνει η γραφική παράσταση της $r = r(\theta) = 1 + \cos\theta$

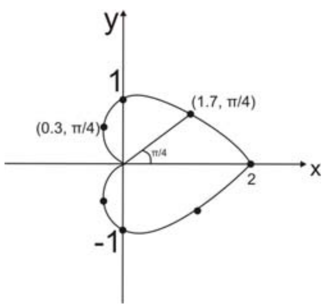
Λύση

Για την γραφική παράσταση δίνουμε τιμές στο θ και παίρνουμε τιμές για το r οπότε στο σύστημα πολικών συντεταγμένων παριστάνουμε τα σημεία (r, θ)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	2	$1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7$	1	$1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,3$	0	$1-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,3$	1	$1+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7$	2

π.χ. αν $\theta = 0 \Rightarrow r = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

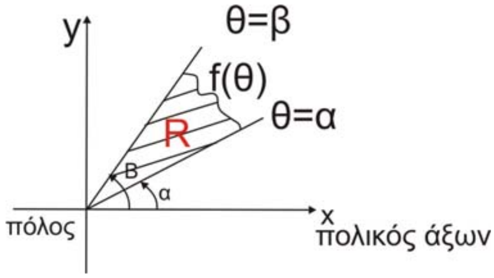
Το σχήμα καλείται **καρδιοειδές**



B. **Εμβαδόν**

Θεωρία

Αν R είναι το χωρίο που δημιουργείται από τις ακτίνες θ=α, και θ=β και την καμπύλη $r = f(\theta)$



τότε το **εμβαδόν του R**, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

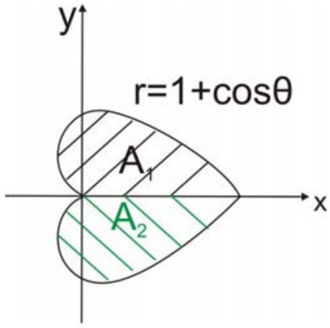
$$E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu \quad R = \int_{a}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί το εμβαδόν του καρδιοειδούς $r = 1 + \cos\theta$

Λύση

Λόγω συμμετρίας το εμβαδόν Α του καρδιοειδούς είναι ίσο με $2A_1$ (μισό του καρδιοειδούς)



Για A_1 $\theta = 0$ κ' $\theta = \pi$

$$A_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta) d\theta + \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta\right)$$

Όπου

$$\int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

Άρα

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi + 2\sin\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 + 2\sin 0 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{4}\sin 20\right) =$$

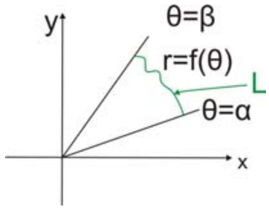
$$= \frac{1}{2}\left(\pi + 0 + \frac{\pi}{2} + 0\right) - \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 0 + 0\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα $A = 2A_1 = 2\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

Γ. <u>ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ</u>

Θεωρία

Το **μήκος τόξου** L μίας καμπύλης $r = f(\theta)$ ανάμεσα στις ακτίνες θ=α και θ=β,



δίνεται από τη σχέση

$$L=\int_{a}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(r'\right)^2}\,d\theta=\int_{a}^{\beta}\sqrt{f^2(\theta)+\left(f'(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί το μήκος τόξου L της $r=f(\theta)=e^{-3\theta}\quad 0\le\theta\le 2\pi$

Λύση

Το μήκος τόξου L θα είναι

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{(-3\theta)^2}+\left(\left(e^{-3\theta}\right)'\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{(-3\theta)^2}+\left(-3e^{-3\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{-6\theta}+9e^{-6\theta}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{10e^{-6\theta}}\,d\theta=$$

$$=\sqrt{10}\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{-6\theta}}\,d\theta=\sqrt{10}\int_0^{2\pi}e^{-6\theta/2}\,d\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}e^{-3\theta}\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\sqrt{10}}{3}(e^{-6\pi}-e^{0})=-\frac{\sqrt{10}}{3}(e^{-6\pi}-1)=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{3}(1-e^{-6\pi})$$