Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας

# ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Άσκηση 1**: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I_1 = \int \frac{3x+2}{x^2+x} \cdot dx$

**Λύση:** $\frac{3x+2}{x^2+x} = \frac{3x+2}{x\cdot(x+1)}$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

οπότε, έχουμε ισοδύναμα: $\frac{3x+2}{x\cdot(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, $A, B \in \mathbb{R}$ όπου με απαλοιφή παρονομα-στών έχουμε:

$$\frac{3x+2}{\cancel{x\cdot(x+1)}} \cdot \cancel{x\cdot(x+1)} = \frac{A}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\cdot(x+1) + \frac{B}{\cancel{x+1}} \cdot x\cdot\cancel{(x+1)} \Rightarrow$$

$$3x+2 = A\cdot(x+1) + B\cdot x \Rightarrow$$

$$3x+2 = A\cdot x + A + B\cdot x \Rightarrow$$

$$3x+2 = (A+B)\cdot x + A$$

οπότε ισχύουν: $\left.\begin{matrix} A+B=3 \\ A=2 \end{matrix}\right\}$ όπου: & $\left.\begin{matrix} B=3-A=3-2=1 \\ A=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} A=2 \\ B=1. \end{matrix}$

Τελικά, είναι: $\frac{3x+2}{x\cdot(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$, οπότε:

$$I_1 = \int \frac{3x+2}{x^2+x}\cdot dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$

$$= \int \frac{2}{x}\cdot dx + \int \frac{1}{x+1}\cdot dx$$

$$= 2\cdot \int \frac{1}{x}\cdot dx + \int \frac{(x+1)'}{x+1}\cdot dx$$

$$= 2\cdot \ln|x| + \ln|x+1| + C, \text{ όπου: } C\in\mathbb{R}.$$

**Άσκηση 2:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I_2 = \int \sqrt{1+e^x}\cdot dx$

**Λύση:** • Θέτουμε: $\boxed{u = \sqrt{1+e^x}}$ (ή $u^2 = 1+e^x \Rightarrow e^x = u^2-1$)

• Λοιπόν είναι: $(u)'\cdot du = \left(\sqrt{1+e^x}\right)'\cdot dx \Rightarrow 1\cdot du = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x\cdot dx$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{2\cdot u}\cdot(u^2-1)\cdot dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2u}{u^2-1}\cdot du}$$

---

**Οπότε, είναι:** $I_2 = \int \sqrt{1+e^x}\cdot dx = \int u\cdot\dfrac{2u}{u^2-1}\cdot du =$

$$= \int \frac{2u^2}{u^2-1}\cdot du = 2\cdot\int\frac{u^2}{u^2-1}\cdot du \quad (*)$$

---

Εκτελούμε τη διαίρεση: $u^2 : (u^2-1)$ ως εξής:

$$\begin{array}{rr|l} \Delta = & u^2 & u^2-1 = \delta \\ \hline + & -u^2+1 & 1 = \pi \\ \hline & 0+1 = 1 = \upsilon & \end{array}$$

οπότε, με την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης, έχουμε:

$$\Delta = \delta\cdot\pi+\upsilon \Rightarrow u^2 = (u^2-1)\cdot 1+1$$

$$\Rightarrow \boxed{u^2 = (u^2-1)+1}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (*), προκύπτει τελικά ότι:

$$I_2 = \int \sqrt{1+e^x}\cdot dx = 2\cdot \int \frac{u^2}{u^2-1}\cdot du =$$

$$= 2\cdot \int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}\cdot du = 2\cdot \int \left[\frac{u^2-1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-1}\right]\cdot du =$$

$$= 2\cdot \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\cdot du = 2\cdot \left(\int 1\cdot du + \int \frac{1}{u^2-1}\cdot du\right) =$$

$$= 2\cdot \left(u + \int \frac{1}{u^2-1}\cdot du\right) = 2u + 2\cdot \int \frac{1}{u^2-1}\cdot du \qquad (**)$$

- όπου το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{u^2-1}\cdot du$, θα υπολογιστεί ως ακολούθως:

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)}$$

$$= \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$ δηλαδή έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$\frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$, απ' όπου με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε:

$$\frac{1}{\cancel{(u-1)}\cancel{(u+1)}}\cdot \cancel{(u-1)}\cdot\cancel{(u+1)} = \frac{A}{\cancel{u-1}}\cdot\cancel{(u-1)}\cdot(u+1) + \frac{B}{\cancel{u+1}}\cdot(u-1)\cdot\cancel{(u+1)} \Rightarrow$$

$$1 = A\cdot(u+1) + B\cdot(u-1) \Rightarrow 1 = A\cdot u + A + B\cdot u - B \Rightarrow$$

$$1 = (A+B)\cdot u + (A-B),$$

οπότε ισχύουν:

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ A-B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-B \\ -B-B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-B \\ -2\cdot B=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-B \\ B=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-\left(-\frac{1}{2}\right) \\ B=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

Συνεπώς, είναι:

$$\int \frac{1}{u^2-1}\cdot du = \int\left(\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\right)\cdot du$$

$$= \int \frac{A}{u-1}\cdot du + \int\frac{B}{u+1}\cdot du$$

$$= \int \frac{1/2}{u-1}\cdot du + \int\frac{-1/2}{u+1}\cdot du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{u-1}\cdot du - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{u+1}\cdot du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \ln|u-1| - \frac{1}{2}\cdot\ln|u+1|$$

- Τελικά, από την (**), έχουμε ότι:

$$I_2 = 2u + 2\cdot\int \frac{1}{u^2-1}\cdot du$$

$$= 2u + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot \ln|u-1| - \frac{1}{2}\cdot \ln|u+1|\right) + C$$

$$= 2u + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot \ln|u-1| - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot \ln|u+1| + C$$

$$= 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + C$$

$$= 2\cdot\sqrt{1+e^x} + \ln\left|\sqrt{1+e^x}-1\right| - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right) + C, \text{ όπου: } C\in\mathbb{R}$$

▸ **Άσκηση 3:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I_3 = \int \frac{e^x+1}{e^x-1} \cdot dx$

**Λύση:** Θέτουμε: $u = e^x \Rightarrow x = \ln u$

Τότε, είναι: $(x)' dx = (\ln u)' \cdot du \Rightarrow 1 \cdot dx = \frac{1}{u} \cdot du \Rightarrow dx = \frac{1}{u} \cdot du$

**Οπότε, έχουμε:** $I_3 = \int \frac{e^x+1}{e^x-1} \cdot dx = \int \frac{u+1}{u-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot du = \int \frac{u+1}{u \cdot (u-1)} \cdot du \quad (*)$

---

Είναι: $\frac{u+1}{u \cdot (u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$, $A, B \in \mathbb{R}$, απ' όπου με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε:

$$\Rightarrow \frac{u+1}{\cancel{u \cdot (u-1)}} \cdot \cancel{u \cdot (u-1)} = \frac{A}{\cancel{u}} \cdot \cancel{u} \cdot (u-1) + \frac{B}{\cancel{u-1}} \cdot u \cdot \cancel{(u-1)}$$

$$\Rightarrow u+1 = A \cdot (u-1) + B \cdot u \Rightarrow u+1 = A \cdot u - A + B \cdot u$$

$$\Rightarrow u+1 = (A+B) \cdot u - A$$, οπότε ισχύουν: $\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=1-A \\ A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=1-(-1) \\ A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=2 \\ A=-1 \end{array}$$

**Οπότε, έχουμε:** $I_3 = \int \frac{u+1}{u \cdot (u-1)} \cdot du = \int \left( \frac{-1}{u} + \frac{2}{u-1} \right) \cdot du =$

$$= \int -\frac{1}{u} \cdot du + \int \frac{2}{u-1} \cdot du$$

$$= -1 \cdot \int \frac{1}{u} \cdot du + 2 \cdot \int \frac{1}{u-1} \cdot du$$

$$= -1 \cdot \int \frac{(u)'}{u} \cdot du + 2 \cdot \int \frac{(u-1)'}{u-1} \cdot du$$

$$= -\ln|u| + 2 \cdot \ln|u-1| + C \text{ , όπου: } C \in \mathbb{R}$$

$$= -\ln(e^x) + 2 \cdot \ln|e^x - 1| + C$$

$$= -x + 2 \cdot \ln|e^x - 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

**Άσκηση 4:** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I_4 = \int \frac{1}{e^x+1} \cdot dx$

**Λύση:** Θέτουμε: $\boxed{u = e^x+1} \Rightarrow e^x = u-1 \Rightarrow x = \ln(u-1)$

Ώστε, είναι: $(x)' \cdot dx = [\ln(u-1)]' \cdot du \Rightarrow 1 \cdot dx = \frac{1}{u-1} \cdot du \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{u-1} \cdot du}$$

Είναι λοιπόν: $I_4 = \int \frac{1}{e^x+1} \cdot dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u-1} \cdot du = \int \frac{1}{u \cdot (u-1)} \cdot du$ (*)

---

όπου: $\frac{1}{u \cdot (u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$, $A, B \in \mathbb{R}$, απ' όπου με απαλοιφή παρονομαστών, προκύπτει ότι:

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{u} \cdot \cancel{(u-1)}} \cdot u \cdot (u-1) = \frac{A}{\cancel{u}} \cdot \cancel{u} \cdot (u-1) + \frac{B}{\cancel{u-1}} \cdot u \cdot \cancel{(u-1)}$$

$$\Rightarrow 1 = A \cdot (u-1) + B \cdot u \Rightarrow 1 = A \cdot u - A + B \cdot u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B) \cdot u - A$$

Οπότε, ισχύουν: $\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ -A=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-A \\ A=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} B=-(-1)=1 \\ A=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} B=1 \\ A=-1 \end{matrix}$

---

**Άρα, είναι:**

$$I_4 = \int \frac{1}{u\cdot(u-1)}\cdot du = \int\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}\right)\cdot du =$$

$$= \int\left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1}\right)\cdot du = \int -\frac{1}{u}\cdot du + \int \frac{1}{u-1}\cdot du =$$

$$= -1\cdot\int\frac{(u)'}{u}\cdot du + \int\frac{(u-1)'}{u-1}\cdot du =$$

$$= -\ln|u| + \ln|u-1| + C \text{, όπου: } C\in\mathbb{R}$$

$$= -\ln(e^x+1) + \ln|e^x+\cancel{1}-\cancel{1}| + C$$

$$= -\ln(e^x+1) + \ln(e^x) + C$$

$$= -\ln(e^x+1) + x + C$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

**Άσκηση 5:** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I_5 = \int \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6} \cdot dx$

**Λύση:** Εκτελώντας την ευκλείδεια διαίρεση $(x^3-17x+31):(x^2-5x+6)$, έχω μέσα:

$$\begin{array}{l|l} \overset{\Delta}{x^3-17x+31} & \overset{\delta}{x^2-5x+6} \\ \hline + \; -x^3+5x^2-6x & \underset{\pi}{x+5} \\ \hline 5x^2-23x+31 & \\ + \; -5x^2+25x-30 & \\ \hline = \; \underset{\upsilon}{2x+1} & \end{array}$$

Χρησιμοποιώντας την Ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης, προκύπτει ότι:

$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x^3-17x+31 = (x^2-5x+6)\cdot(x+5)+(2x+1)}$

Οπότε, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$I_5 = \int \frac{x^3-17x+31}{x^2-5x+6} \cdot dx = \int \frac{(x^2-5x+6)\cdot(x+5)+(2x+1)}{x^2-5x+6} \cdot dx =$$

$$= \int \frac{\cancel{(x^2-5x+6)}\cdot(x+5)}{\cancel{x^2-5x+6}} \cdot dx + \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} \cdot dx =$$

$$= \int (x+5)\cdot dx + \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} \cdot dx = \boxed{\frac{x^2}{2} + 5\cdot x + \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} \cdot dx} \quad (*)$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

▸ Το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\cdot dx$, υπολογίζεται ως εξής:

! Λύνουμε: $x^2-5x+6=0$ $(\alpha=1, \beta=-5, \gamma=6)$

Διακρίνουσα: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1>0$

Λύσεις: $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{5+\sqrt{1}}{2\cdot 1}=3$

$x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha}=\frac{5-\sqrt{1}}{2\cdot 1}=2$

Οπότε: $x^2-5x+6=(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x-3)\cdot(x-2)$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} \overset{!}{=} \frac{2x+1}{(x-2)\cdot(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

δηλαδή έχουμε: $\frac{2x+1}{(x-2)\cdot(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$, $A, B \in \mathbb{R}$, από όπου με απαλοιφή παρονομαστών

έχουμε: $\frac{2x+1}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-3)}}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-3)}=\frac{A}{\cancel{x-2}}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x-3)+\frac{B}{\cancel{x-3}}\cdot(x-2)\cdot\cancel{(x-3)} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 2x+1=A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 2x+1=A\cdot x-3\cdot A+B\cdot x-2\cdot B \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 2x+1=(A+B)\cdot x+(-3A+2\cdot B)$, οπότε ισχύουν: $\left\{\begin{matrix} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{matrix}\right\}$, οπότε προκύπτει:

$$\left.\begin{matrix} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} A=2-B \\ -3\cdot(2-B)-2B=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} A=2-B \\ -6+3B-2B=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} A=2-B \\ B=7 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} A=2-7=-5 \\ B=7 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} A=-5 \\ B=7 \end{matrix}$$

Απαντήσεις προτεινόμενες – ενδεικτικές. Υπάρχει μόνο ένας καλός τρόπος... ο Δικός σας!

Οπότε, έχουμε:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\cdot dx = \int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\right)\cdot dx$$

$$= \int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)\cdot dx$$

$$= \int \frac{-5}{x-2}\cdot dx + \int \frac{7}{x-3}\cdot dx$$

$$= -5\cdot\int \frac{1}{x-2}\cdot dx + 7\cdot\int\frac{1}{x-3}\cdot dx$$

$$= -5\cdot\int \frac{(x-2)'}{x-2}\cdot dx + 7\cdot\int\frac{(x-3)'}{x-3}\cdot dx$$

$$= -5\cdot \ln|x-2| + 7\cdot\ln|x-3| + C,$$

όπου: $C \in \mathbb{R}$.