ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) - Ε.Α.Π. - Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-4x+13)}.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Καταρχήν η ρητή έκφραση του ολοκληρώματος μας δείχνει ότι το πολυώνυμο του παρονομαστή είναι μεγαλύτερου βαθμού από του αριθμητή (και άρα δεν χρειάζεται να προβούμε σε διαίρεση). Σαν πρώτο βήμα τώρα, παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι ήδη σε παραγοντοποιημένη μορφή και απλά εξετάζουμε το τριώνυμο για την ύπαρξη τυχόν ριζών. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες και επομένως παραμένει ως έχει (εάν έχει ρίζες θα γράφαμε το τριώνυμο σαν γινόμενο των ριζών του). Σαν δεύτερο βήμα, επειδή ο παρανομαστής έχει παράγοντες, προβαίνουμε στο σπάσιμο του κλάσματος:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2-4x+13}, \quad A, B, \Gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Πάνω λοιπόν από το διώνυμο βάζουμε τυχαίο αριθμό (μονώνυμο) και πάνω από το τριώνυμο (το οποίο δεν έχει ρίζες) βάζουμε τυχαίο διώνυμο. Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα και εξισώνοντας τους συντελεστές βρίσκουμε τους αριθμούς A, B, Γ, δηλ.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-4x+13)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2-4x+13} = \frac{A(x^2-4x+13)}{x+1} + \frac{(Bx+\Gamma)(x+1)}{x^2-4x+13} =$$

$$\frac{(A+B)x^2+(B-4A+\Gamma)+13A+\Gamma}{(x+1)(x^2-4x+13)} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} A+B=0 \\ B-4A+\Gamma=0 \\ 13A+\Gamma=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A=1/18 \\ B=-1/18. \\ \Gamma=5/18 \end{matrix}\right.$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα Ι την (1) με τους αριθμούς που υπολογίσαμε, το χωρίζουμε σε απλούστερα ολοκληρώματα, δηλ.

$$\mathrm{I}=\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{18}\int\frac{5-x}{x^2-4x+13}dx=\frac{1}{18}\ln(x+1)+\frac{1}{18}\int\frac{5-x}{x^2-4x+13}dx\,. \tag{2}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα θα δώσει λογάριθμο, τον οποίο γράφουμε άμεσα χωρίς απόδειξη, ενθυμούμενοι πάντα τον γενικό τύπο

$$\int\frac{dx}{\alpha x+\beta}=\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha x+\beta)+c\,.$$

Ως αναφορά το δεύτερο ολοκλήρωμα (επειδή το τριώνυμο του παρονομαστή δεν έχει πραγματικές ρίζες) είναι *ρητό ολοκλήρωμα της ειδικής μορφής*

$$\int\frac{Ax+B}{(\alpha x+\beta)^2+1}dx\,.$$

Έστω λοιπόν

$$\mathrm{J}=\int\frac{5-x}{x^2-4x+13}dx\,.$$

Επειδή ο αριθμητής έχει σταθερό όρο, χωρίζουμε το κλάσμα, δηλ.

$$\mathrm{J}=5\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\int\frac{x}{x^2-4x+13}dx\,.$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα εμφανίζουμε την παράγωγο του παρονομαστή στον αριθμητή, δηλ.

$$(x^2-4x+13)'=2x-4\,, \tag{3}$$

οπότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με 2 και προσθαφαιρούμε το 4, δηλ.

$$\mathrm{J}=5\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-4+4}{x^2-4x+13}dx$$

και στη συνέχεια χωρίζουμε το ολοκλήρωμα,

$$\mathrm{J}=5\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx-\frac{4}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=3\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx\,,$$

και χρησιμοποιώντας τη (3) παίρνουμε

$$\mathrm{J}=3\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-4x+13)'}{x^2-4x+13}dx\,.$$

Έτσι, από τον ορισμό το διαφορικού μιας συνάρτησης, έχουμε

$$\mathrm{J}=3\int\frac{dx}{x^2-4x+13}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13}$$

και επομένως από τον *βασικό τύπο αόριστης ολοκλήρωσης*

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c,$$

τελικά

$$J = 3\int \frac{dx}{x^2-4x+13} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, γράφουμε το τριώνυμο σαν άθροισμα τετραγώνων (καθώς δεν έχει πραγματικές ρίζες) σύμφωνα με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνων, δηλ.

$$J = 3\int \frac{dx}{x^2 - 2\frac{4}{2}x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 13} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c = 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+9} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c.$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το 9 γράφουμε το πρώτο ολοκλήρωμα σαν μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου ολοκλήρωσης*

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c. \qquad (4)$$

Άρα,

$$J = 3\int \frac{dx}{9\,\frac{(x-2)^2+9}{9}} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\frac{(x-2)^2}{9}+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c.$$

Εφόσον τώρα το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου* (4), εμφανίζουμε αντί dx το $d((x-2)/3)$ για να εφαρμόσουμε τον γενικό τύπο (4). Συγκεκριμένα, επειδή

$$d\left(\frac{x-2}{3}\right) = \frac{1}{3}dx, \qquad (5)$$

πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε το ολοκλήρωμα με $1/3$, δηλ.

$$J = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\int \frac{1/3\,dx}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c$$

και βάσει της (5) παίρνουμε

$$J = \frac{1}{9}\int \frac{d\left(\frac{x-2}{3}\right)}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c = \frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right| + c.$$

Αντικαθιστώντας στην (2) τελικά έχουμε

$$\mathrm{I}=\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{18}\left[\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+c\right]\ \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{162}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right)-\frac{1}{36}\ln\left|x^2-4x+13\right|+c.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικος Λογισμος Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 2.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^3 - 2x - x + 2}.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Σαν πρώτο βήμα για την ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης είναι να γράψουμε (εάν δεν μας έχει δοθεί έτσι) το πολυώνυμο του παρονομαστή σε μορφή παραγόντων, όταν αυτό είναι δυνατόν. Έτσι, στη συγκεκριμένη άσκηση, έχουμε ένα ανεπτυγμένο πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Εφόσον έχει άρτιο αριθμό όρων προσπαθούμε ανά δύο να δημιουργήσουμε κοινούς παράγοντες. Έτσι, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{x^2(x-1) - x + 1} = \int \frac{dx}{x^2(x-1) - (x-1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2-1)} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Εφόσον τώρα το πολυώνυμο του παρονομαστή παραγοντοποιήθηκε (μια απλή και μια διπλή ρίζα), σαν δεύτερο βήμα "σπάμε" το κλάσμα, δηλ.

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x+1}, \tag{1}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές A, B και Γ κατά τα γνωστά:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A(x-1) + B(x+1) + \Gamma(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax - A + Bx + B + \Gamma x^2 - 2\Gamma x + 1}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$\frac{\Gamma x^2 + (A + B - 2\Gamma)x + (B - A + 1)}{(x-1)^2(x+1)},$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές, παίρνουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} \Gamma=1 \\ A+B-2\Gamma=0 \\ B-A+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Gamma=1 \\ A+B=2 \\ A-B=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Gamma=1 \\ A=3/2. \\ B=1/2 \end{array}\right.$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την (1) με τους γνωστούς πια συντελεστές στο ολοκλήρωμά μας και χωρίζοντάς το, θα έχουμε

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}. \tag{2}$$

Το πρώτο και τρίτο ολοκλήρωμα είναι μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου ολοκλή-ρωσης*

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+c,$$ δηλ. είναι της μορφής

$$\int\frac{dx}{ax+\beta}=\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha x+\beta)+c,$$

οπότε χρησιμοποιούμε άμεσα (χωρίς να αποδεικνύουμε) τον παραπάνω γενικό τύπο. Έτσι η (2) δίνει

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\ln|x-1|. \tag{3}$$

Το ολοκλήρωμα που απομένει είναι μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου ολοκλή-ρωσης*

$\int x^k dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}+c,\ \ k\neq -1$, δηλ. είναι της μορφής $\int(ax+\beta)^k dx$.

Σύμφωνα με τα γνωστά για τις *γραμμικές συνθέσεις βασικών τύπων αόριστης ολοκλήρωσης*, η (3) γράφεται τελικά

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\int(x-1)^{-2}dx=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\int(x-1)^{-2}d(x-1) \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+c=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+c.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 3.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^5 + 8x^3 + 16x}.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας είναι να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο του παρονομαστή. Στη συγκεκριμένη άσκηση το πολυώνυμο αυτό βρίσκεται στην "ανεπτυγμένη" του μορφή, κι έτσι εξετάζουμε τη μορφή του για να βρούμε τρόπο παραγοντοποίησης αυτού. Παρατηρούμε ότι δεν έχει σταθερό όρο κι επομένως μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα κάποια δύναμη του x, δηλ.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^5 + 8x^3 + 16x} = \int \frac{dx}{x(x^4 + 8x^2 + 16)}.$$

Για την παραγοντοποίηση του 4ο–βάθμιου πολυωνύμου (κι επειδή αυτό έχει τρεις όρους) εξετάζουμε μήπως είναι κάποιο ανάπτυγμα τετραγώνου (που όντως είναι), δηλ.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x(x^4 + 8x^2 + 16)} = \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^2}. \tag{1}$$

Το τριώνυμο που προκύπτει δεν έχει πραγματικές ρίζες (είναι άθροισμα τετραγώνων) και η παραγοντοποίηση σταματά.

Εφόσον τώρα το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει γινόμενα προβαίνουμε στο δεύτερο βήμα, δηλ. στο "σπάσιμο" αυτού (ανάλογα με τη μορφή των παραγόντων του). Έτσι, κατά τα γνωστά,

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+4}+\frac{\Delta x+E}{(x^2+4)^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2}=\frac{A(x^2+4)^2+(Bx+\Gamma)x(x^2+4)+(\Delta x+E)x}{x(x^2+4)^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2}=\frac{Ax^4+8Ax^2+16A+(Bx^2+\Gamma x)(x^2+4)+\Delta x^2+Ex}{x(x^2+4)^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2}=\frac{Ax^4+8Ax^2+16A+Bx^4+4Bx^2+\Gamma x^3+4\Gamma x+\Delta x^2+Ex}{x(x^2+4)^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x(x^2+4)^2}=\frac{(A+B)x^4+\Gamma x^3+(8A+4B+\Delta)x^2+(4\Gamma+E)x+16A}{x(x^2+4)^2},$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων των αριθμητών, παίρνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ \Gamma=0 \\ 8A+4B+\Delta=0 \\ 4\Gamma+E=0 \\ 16A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B=-1/16 \\ \Gamma=0 \\ \Delta=-1/4 \\ E=0 \\ A=1/16 \end{array}\right. .$$

Σπάζοντας λοιπόν στα επιμέρους ολοκληρώματα την (1) και αντικαθιστώντας τους συντελεστές που βρήκαμε, παίρνουμε

$$\mathrm{I}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{16}\int\frac{x}{x^2+4}dx-\frac{1}{4}\int\frac{x}{(x^2+4)^2}dx\,.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι *βασικός τύπος αόριστης ολοκλήρωσης* και δίνει λογάριθμο, δηλ.

$$\mathrm{I}=\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{16}\int\frac{x}{x^2+4}dx-\frac{1}{4}\int\frac{x}{(x^2+4)^2}dx\,. \tag{2}$$

Τα ολοκληρώματα του δεύτερου και τρίτου όρου είναι *ολοκληρώματα ρητών παραστάσεων των ειδικών μορφών* (τα τριώνυμα των παρονομαστών δεν διαθέτουν πραγματικές ρίζες),

$$\int\frac{Ax+B}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx \ \text{ και } \int\frac{Ax+B}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m}dx$$

αντίστοιχα. Εφόσον, στην περίπτωσή μας, ο αριθμητής δεν έχει σταθερό όρο εμφανίζουμε και στα δύο την παράγωγο του παρονομαστή (δίχως την πολλαπλότητα), δηλ. $(x^2+4)'=2x$, στον αριθμητή. Άρα

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16}\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx - \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\int\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}dx - \frac{1}{8}\int\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}dx,$$

και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαφορικού μιας συνάρτησης δηλ. $df(x) = f'(x)dx$, παίρνουμε

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \frac{1}{8}\int(x^2+4)^{-2}d(x^2+4).$$

Τα δυο ολοκληρώματα που τελικά λαμβάνουμε είναι ουσιαστικά *γενικές (πολυωνυμικές) συνθέσεις των βασικών τύπων ολοκλήρωσης*

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad \text{και}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1,$$

αντίστοιχα. Επομένως, άμεσα παίρνουμε

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln|x^2+4| - \frac{1}{8}\frac{(x^2+4)^{-2+1}}{-2+1} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln|x^2+4| + \frac{1}{8(x^2+4)}.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 4.

$$\mathrm{I} = \int \frac{3-x}{(x^2+4)^2}\,dx\,.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Στη συγκεκριμένη άσκηση το τριώνυμο του παρονομαστή έχει μιγαδικές ρίζες πολλαπλότητας 2 (δεν έχει πραγματικές ρίζες), οπότε μένει ως έχει. Τα δεύτερο βήμα, που αφορά το “σπάσιμο” του κλάσματος, το προσπερνούμε καθώς ο παρονομαστής δεν έχει άλλους παράγοντες. Σαν τρίτο βήμα παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι *ρητό ολοκλήρωμα της ειδικής μορφής*

$$\int \frac{Ax+B}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}\,dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

(κάτι που θα μπορούσαμε φυσικά εξ’ αρχής να παρατηρήσουμε), και έτσι εργαζόμαστε αναλόγως. Συγκεκριμένα, εφόσον ο αριθμητής έχει σταθερό όρο χωρίζουμε το κλάσμα, κι έτσι έχουμε

$$\mathrm{I} = \int \frac{3-x}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \frac{3}{(x^2+4)^2} - \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx = 3\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} - \int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx\,. \qquad (1)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα της (1) είναι ακριβώς το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (2) στην Άσκηση 3, κι εργαζόμενοι το ίδιο, η (1) παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{I} = 3\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} + \frac{1}{2(x^2+4)}\,.$$

Για το ολοκλήρωμα που απομένει, μετατρέπουμε το πολυώνυμο στη μορφή (καθώς το τριώνυμο του παρονομαστή δεν διαθέτει πραγματικές ρίζες)

$$\left[(ax+\beta)^2+1\right]^2$$

και στη συνέχεια μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα σε (υπερβολικό) τριγωνομετρικό μέσω της αντικατάστασης $ax+\beta=\tan t$ (αντίστ. $ax+\beta=\sinh t$). Καταρχήν λοιπόν διαιρούμε και πολλαπλασιάζουμε με 4 μέσα στο τετράγωνο του παρονομαστή και παίρνουμε

$$\mathrm{I}=3\int\frac{dx}{\left(4\dfrac{x^2+4}{4}\right)^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}=\frac{3}{16}\int\frac{dx}{\left[\left(x^2/4\right)+1\right]^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}=\frac{3}{16}\int\frac{dx}{\left[\left(x/2\right)^2+1\right]^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}.$$

Μετατρέπουμε το ρητό ολοκλήρωμα τώρα σε τριγωνομετρικό μέσω του μετασχηματισμού $x/2=\tan t$. Από την αντικατάσταση αυτή, έχουμε

$x=2\tan t$, και

$$dx=d(2\tan t)\ \Rightarrow\ dx=2(\tan t)'dt\ \Rightarrow\ dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt,$$

και αντικαθιστώντας τα στο ολοκλήρωμα, αυτό γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{3}{16}\int\frac{\dfrac{2}{\cos^2 t}dt}{\left(\tan^2 t+1\right)^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}=\frac{6}{16}\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^2}dt+\frac{1}{2(x^2+4)}=\frac{3}{8}\int\cos^2 t dt+\frac{1}{2(x^2+4)}. \tag{2}$$

Αναγόμαστε λοιπόν σε *τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα άρτιας δύναμης*, και το επιλύουμε ως τέτοιο με υποβιβασμό της δύναμης. Έστω

$$\mathrm{J}=\int\cos^2 t dt.$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $2\cos^2 t=1+\cos 2t$, το ολοκλήρωμα αυτό γίνεται

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}\int 1+\cos 2t dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t dt. \tag{3}$$

Το ολοκλήρωμα που έχουμε τώρα είναι μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου ολοκλήρωσης*

$$\int\cos x dx=\sin x+c.$$

Έτσι λοιπόν στη σχέση (3) εμφανίζουμε στη θέση του dt το $d(2t)$ πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με το 2. Άρα

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int 2\cos 2t dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\int\cos 2t d(2t)$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω *βασικό τύπο αόριστης ολοκλήρωσης*, λαμβάνουμε

$$\mathrm{J}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c.$$

Αντικαθιστώντας το τώρα στη (2), το ολοκλήρωμα της άσκησης γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+\frac{1}{2(x^2+4)}+c=\frac{3}{16}t+\frac{3}{32}\sin 2t+\frac{1}{2(x^2+4)}+c\,, \tag{4}$$

όπου η μεταβλητή t δίνεται από τη σχέση $x/2=\tan t$. Για να έχουμε λοιπόν τώρα τη λύση του ολοκληρώματός μας σε μια "συμπαγή" μορφή, μετατρέπουμε το ημίτονο της (4) σε εφαπτομένη σύμφωνα με το γνωστό τριγωνομετρικό τύπο

$$\sin 2t=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\,,$$

και έτσι η (4) γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{3}{16}t+\frac{3}{32}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}+\frac{1}{2(x^2+4)}+c=\frac{3}{16}t+\frac{3}{16}\frac{\tan t}{1+\tan^2 t}+\frac{1}{2(x^2+4)}+c\,.$$

Λόγω λοιπόν του μετασχηματισμού $x/2=\tan t$, τελικά η λύση θα είναι

$$\mathrm{I}=\frac{3}{16}\arctan(x/2)+\frac{3}{16}\frac{x/2}{1+\left(x/2\right)^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}+c=\frac{3}{16}\arctan(x/2)+\frac{3}{8}\frac{x}{4+x^2}+\frac{1}{2(x^2+4)}+c\,.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 5.

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x^2+x+2)^2}.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Το τριώνυμο όμως δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε μένει ως έχει. Προσπερνούμε επίσης το δεύτερο βήμα, που αφορά το "σπάσιμο" του πολυωνυμικού κλάσματος, καθώς αυτό δεν έχει άλλους παράγοντες. Σαν τρίτο βήμα παρατηρούμε τη μορφή της ρητής παράστασης για να ξεκαθαρίσουμε σε ποια περίπτωση εμπίπτει το ολοκλήρωμά μας. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα είναι *ρητό ολοκλήρωμα της ειδικής μορφής*

$$\int\frac{Ax+B}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\}.$$

Για να το επιλύσουμε σαν τέτοιο, πρέπει πρώτα να φέρουμε τον παρονομαστή στη μορφή

$$\left[(ax+\beta)^2+1\right]^m, \tag{1}$$

έτσι ώστε να προβούμε στη συνέχεια στον μετασχηματισμό $ax+\beta=\tan t$ (αντίστ. $ax+\beta=\sinh t$), μετατρέποντας τη ρητή έκφραση σε (υπερβολική) τριγωνομετρική. Εφόσον το τριώνυμο του παρονομαστή είναι στην "ανεπτυγμένη" του μορφή, με τη συμπλήρωση τετραγώνων το γράφουμε σαν άθροισμα τετραγώνων (καθώς δεν έχει πραγματικές ρίζες), δηλ.

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x^2+x+2)^2}=\int\frac{dx}{\left[x^2+2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\right]^2}=\int\frac{dx}{\left[(x+1/2)^2+7/4\right]^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με $7/4$, φέρνουμε τον παρονομαστή στην επιθυμητή μορφή (1), δηλ.

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\left[7/4\dfrac{(x+1/2)^2+7/4}{7/4}\right]^2}=\frac{16}{49}\int\frac{dx}{\left[\dfrac{(x+1/2)^2}{7/4}+1\right]^2}=\frac{16}{49}\int\frac{dx}{\left[\left(\dfrac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}\right)^2+1\right]^2}. \qquad (2)$$

Θέτοντας τώρα

$$\frac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}=\tan t,$$

παίρνουμε

$$x=\frac{\sqrt{7}}{2}\tan t-\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$dx=d\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\tan t-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\tan t-\frac{1}{2}\right)'dt \;\Rightarrow\; dx=\frac{\sqrt{7}/2}{\cos^2 t}dt.$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην (2), ανάγουμε το ολοκλήρωμά μας σε τριγωνομετρικό, δηλ.

$$\mathrm{I}=\frac{16}{49}\int\frac{\dfrac{\sqrt{7}/2}{\cos^2 t}dt}{\left(\tan^2 t+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{7}}{49}\int\frac{\dfrac{1}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^2}dt=\frac{8\sqrt{7}}{49}\int\cos^2 t dt. \qquad (3)$$

Επιλύουμε τώρα το *τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα άρτιας δύναμης*. Υποβιβάζουμε, κατά τα γνωστά, τη δύναμη με τη χρήση της γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας $2\cos^2 t=1+\cos 2t$, οπότε η (3) γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{4\sqrt{7}}{49}\int 1+\cos 2t dt=\frac{4\sqrt{7}}{49}\int dt+\frac{4\sqrt{7}}{49}\int\cos 2t dt=\frac{4\sqrt{7}}{49}t+\frac{4\sqrt{7}}{49}\int\cos 2t dt.$$

Το ολοκλήρωμα που απομένει είναι μια *γραμμική σύνθεση του βασικού τύπου ολοκλήρωσης*

$$\int\cos x dx=\sin x+c,$$

και εργαζόμενοι κατά τα γνωστά,

$$\mathrm{I}=\frac{4\sqrt{7}}{49}t+\frac{4\sqrt{7}}{49}\frac{1}{2}\int\cos 2t d(2t)=\frac{4\sqrt{7}}{49}t+\frac{2\sqrt{7}}{49}\sin 2t+c. \qquad (4)$$

Θέλουμε την παραπάνω λύση που βρήκαμε να την εκφράσουμε ως προς την αρχική μας μεταβλητή x, μέσω της αντικατάστασης που κάναμε

$$\frac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}=\tan t. \qquad (5)$$

Για να μην έχουμε όμως, στην τελική μας λύση, τόξο εφαπτομένης μέσα σε ημίτονο, δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε το $\sin 2t$ της (4) με εφαπτομένη, βάσει της γνωστής ταυτότητας

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t},$$

δηλ.

$$\mathrm{I} = \frac{4\sqrt{7}}{49}t + \frac{2\sqrt{7}}{49}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} + c,$$

και έτσι, μέσω της (5) τώρα, παίρνουμε μια "ορθότερη" λύση, καθώς η λύση μας γράφεται τώρα

$$\mathrm{I} = \frac{4\sqrt{7}}{49}t + \frac{2\sqrt{7}}{49}\frac{2\dfrac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}}{1+\left(\dfrac{x+1/2}{\sqrt{7}/2}\right)^2} + c = \frac{4\sqrt{7}}{49}t + \frac{2}{7}\frac{x+1/2}{\sqrt{7}/4+(x+1/2)^2} + c.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 6.

$$\mathrm{I} = \int \frac{x+4}{(x^2-2x+5)^3}\,dx .$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Το τριώνυμο όμως δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε μένει ως έχει. Προσπερνούμε επίσης το δεύτερο βήμα που αφορά το "σπάσιμο" του πολυωνυμικού κλάσματος καθώς αυτό δεν έχει άλλους παράγοντες. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα είναι της ειδικής μορφής

$$\int \frac{Ax+B}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}\,dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\} .$$

Για την περίπτωση λοιπόν αυτή, εφόσον έχουμε σταθερό όρο στον αριθμητή μπορούμε να χωρίσουμε το κλάσμα. Μπορούμε όμως και να συνεχίσουμε, με τη ρητή έκφραση όπως είναι (ο χωρισμός του κλάσματος γίνεται γενικά για ευκολία). Πρέπει τώρα να φέρουμε τον παρονομαστή στη μορφή

$$\left[(ax+\beta)^2+1\right]^m , \qquad (1)$$

έτσι ώστε να προβούμε στη συνέχεια στον μετασχηματισμό $ax+\beta=\tan t$, μετατρέποντας τη ρητή έκφραση σε τριγωνομετρική. Εφόσον το τριώνυμο του παρονομαστή είναι στην "ανεπτυγμένη" του μορφή, με τη συμπλήρωση τετραγώνων το γράφουμε σαν άθροισμα τετραγώνων, δηλ.

$$\mathrm{I} = \int \frac{x+4}{(x^2-2x+5)^3}\,dx = \int \frac{x+4}{\left[x^2-2\frac{2}{2}x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+5\right]^3}\,dx = \int \frac{x+4}{\left[(x-1)^2+4\right]^3}\,dx .$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με 4, φέρνουμε τον παρονομαστή στην επιθυμητή μορφή (1), δηλ.

$$\mathrm{I}=\int \frac{x+4}{\left[4\dfrac{(x-1)^2+4}{4}\right]^3}dx=\frac{1}{4^3}\int \frac{x+4}{\left[\dfrac{(x-1)^2}{4}+1\right]^3}dx=\frac{1}{64}\int \frac{x+4}{\left[\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1\right]^3}dx . \qquad (2)$$

Θέτοντας τώρα

$$\frac{x-1}{2}=\tan t ,$$

παίρνουμε

$x=2\tan t+1$ και

$$dx=d(2\tan t+1)=(2\tan t+1)'dt \;\Rightarrow\; dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt .$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην (2), ανάγουμε το ολοκλήρωμά μας σε τριγωνομετρικό, δηλ.

$$\mathrm{I}=\frac{1}{64}\int \frac{2\tan t+1+4}{\left(\tan^2 t+1\right)^3}\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{32}\int \frac{2\tan t+5}{\left(\tan^2 t+1\right)^3}\frac{1}{\cos^2 t}dt \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{32}\int \frac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}+5}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^3}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{32}\int \frac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}+5}{\dfrac{1}{\cos^4 t}}dt=\frac{1}{32}\int (2\sin t+5\cos t)\cos^3 t dt \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{16}\int \sin t\cos^3 t dt+\frac{5}{32}\int \cos^4 t dt. \qquad (3)$$

Έστω

$$\mathrm{J}=\int \sin t\cos^3 t dt,\;\; \mathrm{K}=\int \cos^4 t dt.$$

Τα δυο αυτά τριγωνομετρικά ολοκληρώματα μπορούν να επιλυθούν σύμφωνα με την ειδική μέθοδο επίλυσης *γινομένου τριγωνομετρικών περιττής δύναμης* και *άρτιας δύναμης* αντίστοιχα. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, εφόσον υπάρχει τριγωνομετρικό σε περιττή δύναμη, σπάμε τη δύναμη και παίρνουμε κατά τα γνωστά (της αντίστοιχης μεθόδου)

$$\mathrm{J}=\int \sin t\cos^3 t dt=\int \sin t\cos^2 t\cos t dt=\int \sin t\cos^2 t(\sin t)'dt ,$$

και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης δηλ. $df(x)=f'(x)dx$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\mathrm{J}=\int \sin t\cos^2 t d(\sin t) .$$

Εφαρμόζοντας τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα, παίρνουμε

$$\mathrm{J}=\int \sin t(1-\sin^2 t)d(\sin t)=\int \sin t d(\sin t)-\int \sin^3 t d(\sin t) ,$$

όπου τα δύο αυτά ολοκληρώματα είναι *γενικές (τριγωνομετρικές) συνθέσεις του βασικού τύπου αόριστης ολοκλήρωσης*

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1,$$

με μεταβλητή την $\sin t$. Έτσι τελικά, έχουμε

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2}\sin^2 t - \frac{1}{4}\sin^4 t + c.$$

Για το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{K} = \int \cos^4 t dt,$$

εργαζόμαστε, κατά τα γνωστά (υποβιβάζοντας τη δύναμη), κάνοντας χρήση της γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$, δηλ.

$$\mathrm{K} = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2t)^2 dt = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right] dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt + \frac{1}{8}\int dt + \frac{1}{8}\int \cos 4t dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t dt + \frac{1}{8}\int \cos 4t dt.$$

Τα ολοκληρώματα που απομένουν είναι *γραμμικές συνθέσεις του βασικού τύπου αόριστης ολοκλήρωσης*

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{K} = \frac{3}{8}t + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) + \frac{1}{8}\frac{1}{4}\int \cos 4t d(4t) \Rightarrow$$

$$\mathrm{K} = \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + c.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τα επιμέρους ολοκληρώματα J και K στην (3), παίρνουμε

$$\mathrm{I} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\sin^2 t - \frac{1}{4}\sin^4 t\right) + \frac{5}{32}\left(\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t\right) + \mathrm{c} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{32}\sin^2 t - \frac{1}{64}\sin^4 t + \frac{15}{256}t + \frac{5}{128}\sin 2t + \frac{5}{1024}\sin 4t + c. \tag{4}$$

Επιθυμούμε, όμως, τα παραπάνω τριγωνομετρικά να έχουν μεταβλητή $2t$ αντί t και $4t$, έτσι ώστε κατά την μετατροπή τους σε εφαπτομένες, βάσει των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \quad \text{και}$$

$$\cos 2t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t},$$

να έχουμε μόνο εφαπτομένες της t, για να απλοποιηθεί έτσι η τελική παράσταση βάσει του μετασχηματισμού που κάναμε πριν:

$$\frac{x-1}{2} = \tan t .$$

Κάνοντας λοιπό χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων $2\sin^2 t = 1-\cos 2t$ και $\sin 2t = 2\sin t \cos t$, η (4) δίνει

$$\mathrm{I} = \frac{1}{64}(1-\cos 2t) - \frac{1}{64\cdot 4}(1-\cos 2t)^2 + \frac{15}{256}t + \frac{5}{128}\sin 2t + \frac{5\cdot 2}{1024}\sin 2t\cos 2t + c \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{64}(1-\cos 2t) - \frac{1}{256}(1-\cos 2t)^2 + \frac{15}{256}t + \frac{5}{128}\sin 2t + \frac{5}{512}\sin 2t\cos 2t + c . \qquad (5)$$

Τώρα λοιπόν, μετατρέπουμε τα ημίτονα και τα συνημίτονα, στα οποία εκφράστηκε το ολοκλήρωμά μας, σε εφαπτομένες βάσει των παραπάνω γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\mathrm{I} = \frac{1}{64}\left(1-\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\right) - \frac{1}{256}\left(1-\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\right)^2 + \frac{15}{256}t + \frac{5}{128}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} + \frac{5}{512}\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t} + c \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{32}\left(\frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\right) - \frac{1}{64}\left(\frac{\tan^2 t}{1+\tan^2 t}\right)^2 + \frac{15}{256}t + \frac{5}{64}\frac{\tan t}{1+\tan^2 t} + \frac{5}{256}\frac{\tan t\left(1-\tan^2 t\right)}{\left(1+\tan^2 t\right)^2} + c . \qquad (6)$$

Γράφουμε τώρα την παραπάνω λύση στην αρχική μεταβλητή x, αντικαθιστώντας την εφαπτομένη από το μετασχηματισμό που κάναμε πριν

$$\frac{x-1}{2} = \tan t .$$

Η (6) λοιπόν θα γραφεί τελικά,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{32}\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} - \frac{1}{64}\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]^2} + \frac{15}{256}\arctan\frac{x-1}{2} +$$

$$+\frac{5}{64}\frac{\frac{x-1}{2}}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + \frac{5}{256}\frac{\frac{x-1}{2}\left[1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]^2}{\left[1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right]^2} + c \;\Rightarrow$$

$$I=\frac{1}{32}\cdot\frac{x-1}{4+(x-1)^2}-\frac{1}{64}\cdot\frac{(x-1)^4}{\left[4+(x-1)^2\right]^2}+\frac{15}{256}\arctan\frac{x-1}{2}+\frac{5}{32}\frac{x-1}{4+(x-1)^2}+\frac{5}{512}\frac{(x-1)\left[4-(x-1)^2\right]^2}{\left[4+(x-1)^2\right]^2}+c.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) - Ε.Α.Π. - Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικος Λογισμος Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΆΣΚΗΣΗ 7.

$$\mathrm{I}=\int \frac{3x^2-x+1}{(x^2+4)^2}dx .$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας για την επίλυση του ζητούμενου ρητού ολοκληρώματος αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Το τριώνυμο όμως δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε μένει ως έχει. Το δεύτερο βήμα, αφορά το σπάσιμο του κλάσματος σε απλούστερα, αλλά στην περίπτωσή μας, το πολυώνυμο του παρονομαστή δεν διαθέτει διάφορους μεταξύ τους παράγοντες, παρά μόνο έναν (μια μιγαδική ρίζα διπλής πολλαπλότητας). Παρατηρούμε έτσι (κάτι που θα μπορούσαμε εξ' αρχής να παρατηρήσουμε) ότι το ρητό ολοκλήρωμά μας, είναι της μορφής,

$$\int \frac{Ax+Bx+\Gamma}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\} .$$

Στην περίπτωση αυτή (σύμφωνα με την αντίστοιχη μεθοδολογία της αόριστης ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων), εμφανίζουμε το τριώνυμο του παρονομαστή στον αριθμητή, δηλ.

$$\mathrm{I}=3\int \frac{x^2-(1/3)x+1/3}{(x^2+4)^2}dx=3\int \frac{x^2+4-4-(1/3)x+1/3}{(x^2+4)^2}dx=3\int \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2}+\frac{-(1/3)x-11/3}{(t^2+1)^2}dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=3\int \frac{dx}{x^2+4}-\int \frac{x+11}{(x^2+4)^2}dx .$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι *γραμμική σύνθεση βασικού τύπου αόριστης ολοκλήρωσης*, ενώ το δεύτερο το είναι της μορφής

$$\int \frac{Ax+B}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\} .$$

και, σύμφωνα με την αντίστοιχη μεθοδολογία, το σπάμε και το μετατρέπουμε σε τριγωνομετρικό. Άρα,

$$\mathrm{I}=3\int\frac{dx}{4\frac{x^2+4}{4}}-\int\frac{x+11}{\left(4\frac{x^2+4}{4}\right)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x/2)^2+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{4}2\int\frac{d(x/2)}{(x/2)^2+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx\,.$$

Σπάμε το ολοκλήρωμα που απομένει (καθώς ο αριθμητής έχει σταθερό όρο), και επομένως

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}+\frac{11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\,.$$

Στο πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα, εμφανίζουμε στον αριθμητή του την παράγωγο του τριωνύμου του παρονομαστή, δηλ.

$\left[(x/2)^2+1\right]'=x/2$, οπότε

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}2\int\frac{x/2}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{\left[(x/2)^2+1\right]'}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{d\left[(x/2)^2+1\right]}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\text{, όπου } t=(x/2)^2+1\,.$$

Άρα λοιπόν

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\frac{t^{-2+1}}{-2+1}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)+\frac{1/8}{(x/2)^2+1}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}\,.$$

Μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα που απομένει σε τριγωνομετρικό, θέτοντας $x = \tan t$. Παίρνουμε λοιπόν, $dx = d(\tan t) = dt/\cos^2 t$, και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα, θα έχουμε

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \frac{dt}{\cos^2 t\left[\tan^2 t + 1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \frac{dt}{\cos^2 t\left[\frac{1}{\cos^2 t}\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \cos^2 t dt,$$

και κατά τα γνωστά,

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\int \cos 2t dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{64}\sin 2t + c. \qquad (1)$$

Για να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή t, μέσω του μετασχηματισμού μας $x = \tan t$, θα θέλαμε στη λύση (1), το $\sin 2t$ να είναι γραμμένο σαν $\tan t$. Τα ημίτονα και συνημίτονα, όπως ξέρουμε, μπορούν πάντα να γραφούν σαν εφαπτομένες, βάσει γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Για το ημίτονο, συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t},$$

οπότε η (1) μπορεί να γραφεί

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{\tan t}{1+\tan^2 t} + c.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τον μετασχηματισμό μας $x = \tan t$, παίρνουμε τελικά τη λύση

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{x}{1+x^2} + c.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) - Ε.Α.Π. - Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΆΣΚΗΣΗ 7.

$$\mathrm{I} = \int \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2+4)^2} dx .$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας για την επίλυση του ζητούμενου ρητού ολοκληρώματος αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Το τριώνυμο όμως δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε μένει ως έχει. Το δεύτερο βήμα, αφορά το σπάσιμο του κλάσματος σε απλούστερα, αλλά στην περίπτωσή μας, το πολυώνυμο του παρονομαστή δεν διαθέτει διάφορους μεταξύ τους παράγοντες, παρά μόνο έναν (μια μιγαδική ρίζα διπλής πολλαπλότητας). Παρατηρούμε έτσι (κάτι που θα μπορούσαμε εξ' αρχής να παρατηρήσουμε) ότι το ρητό ολοκλήρωμά μας, είναι της μορφής,

$$\int \frac{Ax + Bx + \Gamma}{\left[(\alpha x + \beta)^2 + 1\right]^m} dx,\ m \in \mathbb{N} - \{0,1\} .$$

Στην περίπτωση αυτή (σύμφωνα με την αντίστοιχη μεθοδολογία της αόριστης ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων), εμφανίζουμε το τριώνυμο του παρονομαστή στον αριθμητή, δηλ.

$$\mathrm{I} = 3\int \frac{x^2 - (1/3)x + 1/3}{(x^2+4)^2} dx = 3\int \frac{x^2 + 4 - 4 - (1/3)x + 1/3}{(x^2+4)^2} dx = 3\int \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2} + \frac{-(1/3)x - 11/3}{(t^2+1)^2} dt \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = 3\int \frac{dx}{x^2+4} - \int \frac{x+11}{(x^2+4)^2} dx .$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι *γραμμική σύνθεση βασικού τύπου αόριστης ολοκλήρωσης*, ενώ το δεύτερο το είναι της μορφής

$$\int \frac{Ax + B}{\left[(\alpha x + \beta)^2 + 1\right]^m} dx,\ m \in \mathbb{N} - \{0,1\} .$$

και, σύμφωνα με την αντίστοιχη μεθοδολογία, το σπάμε και το μετατρέπουμε σε τριγωνομετρικό. Άρα,

$$\mathrm{I}=3\int\frac{dx}{4\frac{x^2+4}{4}}-\int\frac{x+11}{\left(4\frac{x^2+4}{4}\right)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x/2)^2+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{4}2\int\frac{d(x/2)}{(x/2)^2+1}-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x+11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx.$$

Σπάμε το ολοκλήρωμα που απομένει (καθώς ο αριθμητής έχει σταθερό όρο), και επομένως

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}+\frac{11}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}\int\frac{x}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}.$$

Στο πρώτο από τα δύο ολοκληρώματα, εμφανίζουμε στον αριθμητή του την παράγωγο του τριωνύμου του παρονομαστή, δηλ.

$\left[(x/2)^2+1\right]'=x/2$, οπότε

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{16}2\int\frac{x/2}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{\left[(x/2)^2+1\right]'}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}dx-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{d\left[(x/2)^2+1\right]}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}, \text{ όπου } t=(x/2)^2+1.$$

Άρα λοιπόν

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)-\frac{1}{8}\frac{t^{-2+1}}{-2+1}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{3}{2}\arctan(x/2)+\frac{1/8}{(x/2)^2+1}-\frac{11}{16}\int\frac{dx}{\left[(x/2)^2+1\right]^2}.$$

Μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα που απομένει σε τριγωνομετρικό, θέτοντας $x=\tan t$. Παίρνουμε λοιπόν, $dx = d(\tan t) = dt/\cos^2 t$, και αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα, θα έχουμε

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \frac{dt}{\cos^2 t\left[\tan^2 t+1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \frac{dt}{\cos^2 t\left[\dfrac{1}{\cos^2 t}\right]^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\int \cos^2 t dt\,,$$

και κατά τα γνωστά,

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{16}\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\int \cos 2t dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{1}{2}\int \cos 2t d(2t) \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{64}\sin 2t + c\,. \qquad (1)$$

Για να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή t, μέσω του μετασχηματισμού μας $x=\tan t$, θα θέλαμε στη λύση (1), το $\sin 2t$ να είναι γραμμένο σαν $\tan t$. Τα ημίτονα και συνημίτονα, όπως ξέρουμε, μπορούν πάντα να γραφούν σαν εφαπτομένες, βάσει γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Για το ημίτονο, συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι

$$\sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\,,$$

οπότε η (1) μπορεί να γραφεί

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{\tan t}{1+\tan^2 t} + c\,.$$

Αντικαθιστώντας τώρα τον μετασχηματισμό μας $x=\tan t$, παίρνουμε τελικά τη λύση

$$\mathrm{I} = \frac{3}{2}\arctan(x/2) + \frac{1/8}{(x/2)^2+1} - \frac{11}{32}\frac{x}{1+x^2} + c\,.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) – Ε.Α.Π. – Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικος Λογισμος Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 8.

$$\mathrm{I}=\int \frac{3x^4+17x^2+10}{(x^2+1)^2}dx\,.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Η ρητή έκφραση του ολοκληρώματός μας έχει ισοβάθμια πολυώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή και επομένως πρέπει να προβούμε σε διαίρεση πολυωνύμων. Μπορούμε όμως, πιο άμεσα, να απλοποιήσουμε τη ρητή παράσταση εμφανίζοντας το πολυώνυμο του παρονομαστή στον αριθμητή, δηλ.

$$\mathrm{I}=\int \frac{3x^4+17x^2+10}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{3}\int \frac{x^4+(17/3)x^2+10/3}{x^4+2x^2+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{x^4+(2x^2+1)-(2x^2+1)+(17/3)x^2+10/3}{x^4+2x^2+1}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{1}{3}\int \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+1}+\frac{(11/3)x^2+7/3}{x^4+2x^2+1}dx=\frac{1}{3}\int 1+\frac{(11/3)x^2+7/3}{x^4+2x^2+1}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\int \frac{(11/3)x^2+7/3}{(x^2+1)^2}dx\,.$$

Αναγόμαστε έτσι σε ρητό ολοκλήρωμα στη διαιρεμένη του μορφή. Είναι προφανές ότι το πολυώνυμο του παρονομαστή δεν διαθέτει πραγματικές ρίζες και ούτε περιλαμβάνει άλλους παράγοντες για να το απλοποιήσουμε σπάζοντάς το. Παρατηρούμε εδώ ότι το ολοκλήρωμά μας είναι *ρητό ολοκλήρωμα της ειδικής μορφής*

$$\int \frac{Ax+B+\Gamma}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}dx,\, m\in\mathbb{N}-\{0,1\}\,.$$

οπότε και εργαζόμαστε με την αντίστοιχη μεθοδολογία. Εμφανίζουμε λοιπόν το τριώνυμο του παρονομαστή στον αριθμητή, δηλ.

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\frac{11}{3}\int\frac{x^2+7/11}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\int\frac{x^2+1-1+7/11}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}+\frac{-4/11}{(x^2+1)^2}dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{4}{9}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι *βασικός τύπος αόριστης ολοκλήρωσης*, ενώ το δεύτερο είναι της μορφής

$$\int\frac{Ax+B}{\left[(\alpha x+\beta)^2+1\right]^m}dx,\ m\in\mathbb{N}-\{0,1\}.$$

και ανάγεται σε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{4}{9}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Μέσω τώρα της αντικατάστασης $x=\tan t$, έχουμε $dx=d(\tan t)=dt/\cos^2 t$, οπότε το παραπάνω ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{4}{9}\int\frac{dt}{\cos^2 t(\tan^2 t+1)^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{4}{9}\int\frac{dt}{\cos^2 t(\frac{1}{\cos^2 t})^2}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{4}{9}\int\cos^2 t\,dt.$$

Κατά τα γνωστά τώρα, το ολοκλήρωμα που απομένει βάση γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας, γίνεται

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{4}{9}\frac{1}{2}\int 1+\cos(2t)dt=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{2}{9}t-\frac{2}{9}\int\cos(2t)dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{2}{9}t-\frac{2}{9}\frac{1}{2}\int\cos(2t)d(2t) \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{2}{9}t-\frac{1}{9}\sin 2t+c. \qquad (1)$$

Για να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή t, μέσω του μετασχηματισμού μας $x=\tan t$, θα θέλαμε στη λύση (1), το $\sin 2t$ να είναι γραμμένο σαν $\tan t$. Τα ημίτονα και συνημίτονα, όπως ξέρουμε, μπορούν πάντα να γραφούν σαν εφαπτομένες, βάσει γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Για το ημίτονο, συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι

$$\sin 2t=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t},$$

οπότε η (1) μπορεί πλέον να γραφεί

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{2}{9}t-\frac{2}{9}\frac{\tan t}{1+\tan^2 t}+c\,,$$

και έτσι βάσει του μετασχηματισμού μας $x=\tan t$, τελικά παίρνουμε τη λύση

$$\mathrm{I}=\frac{x}{3}+\frac{11}{9}\arctan x-\frac{2}{9}\arctan x-\frac{2}{9}\frac{x}{1+x^2}+c=\frac{x}{3}+\arctan x-\frac{2}{9}\frac{x}{1+x^2}+c\,.$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Α.Ε.Ι. (Ε.Μ.Π.) - Ε.Α.Π. - Α.Τ.Ε.Ι.

Ολοκληρωτικος Λογισμος Ι >> Αόριστη Ολοκλήρωση >> Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 9.

$$\mathrm{I}=\int\frac{3x^4-2x^2-1}{(x^2+1)^3}dx\,.$$

ΕΠΙΛΥΣΗ: Το πρώτο βήμα μας για την επίλυση του ζητούμενου ρητού ολοκληρώματος αφορά την παραγοντοποίηση του πολυώνυμο του παρονομαστή. Το τριώνυμο όμως δεν έχει πραγματικές ρίζες, οπότε μένει ως έχει. Το δεύτερο βήμα, αφορά το σπάσιμο του κλάσματος σε απλούστερα, αλλά στην περίπτωσή μας, το πολυώνυμο του παρονομαστή δεν διαθέτει διάφορους μεταξύ τους παράγοντες, παρά μόνο έναν (μια μιγαδική ρίζα τριπλής πολλαπλότητας). Παρατηρούμε έτσι (κάτι που θα μπορούσαμε εξ' αρχής να παρατηρήσουμε) ότι το ρητό ολοκλήρωμά μας, είναι της μορφής,

$$\int\frac{P_k(x)}{\left[(ax+\beta)^2+1\right]^n}dx,\ n\in\mathbb{N}-\{0,1\},\ 2<k\neq 2n\,.$$

Στην περίπτωση λοιπόν αυτή, που ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι διάφορος του παρονομαστή (σύμφωνα με την αντίστοιχη μεθοδολογία της αόριστης ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων), μετατρέπουμε κατευθείαν το ολοκλήρωμα σε (υπερβολικό) τριγωνομετρικό μέσω του μετασχηματισμού $ax+\beta=\tan t$ (αντίστ. $ax+\beta=\sinh t$).

Μέσω της αντικατάστασης $x=\tan t$, έχουμε $dx=d(\tan t)=dt/\cos^2 t$, οπότε το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{I}=\int\frac{3\tan^4 t-2\tan^2 t-1}{\cos^2 t(\tan^2 t+1)^3}dt=\int\frac{3\tan^4 t-2\tan^2 t-1}{\cos^2 t\dfrac{1}{\cos^6 t}}dt=\int\cos^4 t(3\tan^4 t-2\tan^2 t-1)du\ \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\int\left(3\sin^4 t-2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}-\frac{1}{\cos^4 t}\right)dt=3\int\sin^4 tdt-2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt-\int\frac{1}{\cos^4 t}dt\,. \qquad (1)$$

Υπολογίζουμε σαν *δύναμη τριγωνομετρικού*, το πρώτο ολοκλήρωμα, δηλ. με κατά παράγοντες ολοκλήρωση Κατά τα γνωστά λοιπόν, παίρνουμε διαδοχικά

$$\int \sin^4 t dx = \int \sin^3 t \sin t dx = \int \sin^3 t(-\cos t)' dt \ \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 t dt = -\sin^3 t \cos t + \int (\sin^3 t)' \cos t dt = -\sin^3 t \cos t + 3\int \sin^2 t \cos^2 t dt \ .$$

Εμφανίζουμε (μέσα στο ολοκλήρωμα) μόνο το ημίτονο, με τη χρήση της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας, δηλ.

$$\int \sin^4 t dx = -\sin^3 t \cos t + 3\int \sin^2 t(1-\sin^2 t)dt \ \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 t dt = -\sin^3 t \cos t + 3\int \sin^2 t dt - 3\int \sin^4 t dt \ \Rightarrow$$

$$4\int \sin^4 t dt = -\sin^3 t \cos t + 3\int \sin^2 t dt \ \Rightarrow$$

$$\int \sin^4 t dt = -\frac{1}{4}\sin^3 t \cos t + \frac{3}{4}\int \sin^2 t dt.$$

Από γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα, υποβιβάζουμε τη δύναμη του ημιτόνου, δηλ.

$$\int \sin^4 t dt = -\frac{1}{4}\sin^3 t \cos t + \frac{3}{8}\int (1-\cos 2t)dt = -\frac{1}{4}\sin^3 t \cos t + \frac{3}{8}t - \frac{3}{16}\sin 2t + c \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (1), παίρνουμε

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{4}\sin^3 t \cos t + \frac{9}{8}t - \frac{9}{16}\sin 2t - 2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt - \int \frac{1}{\cos^4 t} dt \ . \qquad (2)$$

Τα εναπομείναντα ολοκληρώματα της (2) είναι των μορφών

$$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx, \ \ m,n \in \mathbb{N} \ \text{ και } \int \frac{dx}{\cos^n x}, \ n \in \mathbb{N}$$

αντίστοιχα, δηλ. πηλίκα τριγωνομετρικών αρτίων δυνάμεων. Επειδή έχουμε άρτιες δυνάμεις, εργαζόμαστε με την γενική μεθοδολογία, δηλ. πραγματοποιούμε τον μετασχηματισμό $u = \tan(t/2)$, από όπου έχουμε,

$$t = 2\arctan u \ , \ dt = \frac{2du}{1+u^2} \ , \ \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \ , \ \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \ .$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τα παραπάνω στη (2), αναγόμαστε σε ρητή ολοκλήρωση, δηλ.

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{4}\sin^3 t \cos t + \frac{9}{8}t - \frac{9}{16}\sin 2t - 2\int \frac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2}\frac{2du}{1+u^2} - \int \frac{1}{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^4}\frac{2du}{1+u^2} \ \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{4}\sin^3 t\cos t + \frac{9}{8}t - \frac{9}{16}\sin 2t - 16\int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)^2}du - 2\int \frac{(1+u^2)^3}{(1-u^2)^4}du \Rightarrow$$

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{4}\sin^3 t\cos t + \frac{9}{8}t - \frac{9}{16}\sin 2t - 16\int \frac{u^2}{(1+u^2)(1+u)^2(1-u)^2}du - 2\int \frac{(1+u^2)^3}{(1+u)^4(1-u)^4}du .$$

Κατά τα γνωστά λοιπόν για την ρητή ολοκλήρωση, από τα παραπάνω ολοκληρώματα (τα οποία βρίσκονται στη διαιρεμένη τους μορφή), παίρνουμε

$$\mathrm{I} = -\frac{3}{4}\sin^3 t\cos t + \frac{9}{8}t - \frac{9}{16}\sin 2t - 16\int \frac{A_1u + A_2}{1+u^2}du - 16A_3\int \frac{du}{1+u} - 16A_4\int \frac{du}{(1+u)^2} - 16A_5\int \frac{du}{1-u} - -16A_6\int \frac{du}{(1-u)^2} -$$

$$-2A_7\int \frac{du}{1+u} - 2A_8\int \frac{du}{(1+u)^2} - 2A_9\int \frac{du}{(1+u)^3} - 2A_{10}\int \frac{du}{(1+u)^4} -$$

$$-2A_{11}\int \frac{du}{1-u} - 2A_{12}\int \frac{du}{(1-u)^2} - 2A_{13}\int \frac{du}{(1-u)^3} - 2A_{14}\int \frac{du}{(1-u)^4} .$$