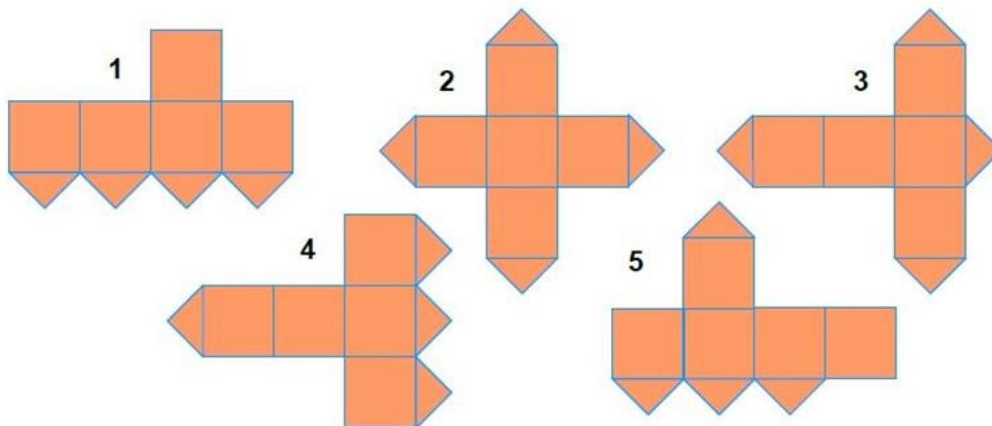


6^η εβδομάδα

Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών Kangaroo

Ερώτηση 1

Η μία πλευρά του κύβου είναι κομμένη κατά μήκος των διαγωνίων του (βλέπε σχήμα). Ποια από τα παρακάτω σχήματα δεν δίνουν τον κύβο αν διπλωθούν;



- A) 1 και 3 B) 1 και 5 Γ) 3 και 4 Δ) 3 και 5 E) 2 και 4

Λύση

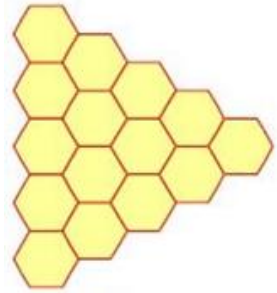
Το σχήμα 3 αν διπλωθεί, θα δώσει έναν κύβο που στην μία έδρα του θα λείπει ένα τρίγωνο κομμάτι. Συνεπώς δεν μπορεί να δώσει κύβο. Το ίδιο ισχύει και για το σχήμα 5.

Στα υπόλοιπα σχήματα, όλα τα κομμάτια αν ενωθούν θα δώσουν κύβο (Συγκεκριμένα τα τρίγωνα ενώνονται και σχηματίζουν μία έδρα του κύβου).

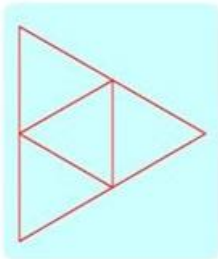
Σωστό το Δ

Ερώτηση 2

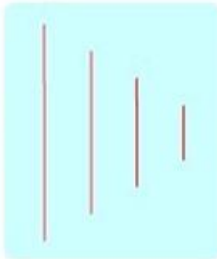
Με βάση την εικόνα δεξιά ζωγραφίζουμε μία καινούργια ενώνοντας το κέντρα συμμετρίας οποιωνδήποτε δύο γειτονικών εξαγώνων. Τι σχήμα θα προκύψει;



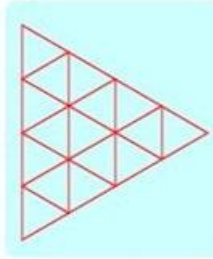
A)



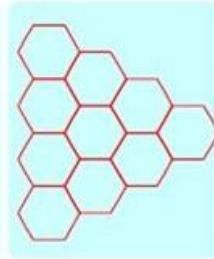
B)



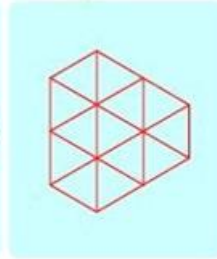
Γ)



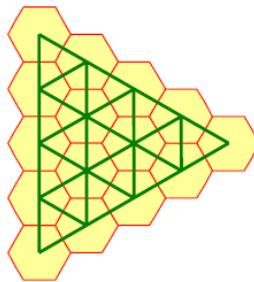
Δ)



Ε)



Λύση



Το κέντρο συμμετρίας του εξαγώνου είναι στο κέντρο του. Η εικόνα δείχνει τη ζωγραφιά που προκύπτει αν ενώσουμε τα κέντρα συμμετρίας οποιωνδήποτε δύο γειτονικών εξαγώνων.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 3

Γράφουμε τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4....., διαδοχικά σε τρεις στήλες από τετραγωνάκια όπως δείχνει το σχήμα. Εκεί που υπάρχει X στο τετραγωνάκι μένει κενό. Ποιος αριθμός μπαίνει στο εκατοστό τετραγωνάκι της μεσαίας στήλης;

- A) 197 B) 199 Γ) 200 Δ) 299
 E) κανένας από τους προηγούμενους

1	2	X
3	X	4
X	5	6
7	8	X
9	X	10
X	11	12
13	14	X
⋮	⋮	⋮

Λύση

1	2	X
3	X	4
X	5	6
7	8	X
9	X	10
X	11	12
13	14	X
15	X	16
X	17	18
19	20	X
21	X	22
X	23	24

Συνεχίζοντας την αρίθμηση του σχήματος έχουμε το σχήμα αριστερά.

Το 10^ο τετραγωνάκι της μεσαίας στήλης είναι αυτό που περιέχει τον αριθμό 20. Άρα συμπεραίνουμε ότι το 100^ο τετραγωνάκι της μεσαίας στήλης θα περιέχει τον αριθμό $10 \times 20 = 200$.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 4

Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος;

- A) 2011^1 B) 1^{2011} Γ) $1 \cdot 2011$ Δ) $1 + 2011$ E) $1 : 2011$

Λύση

Η σειρά των αριθμών είναι:

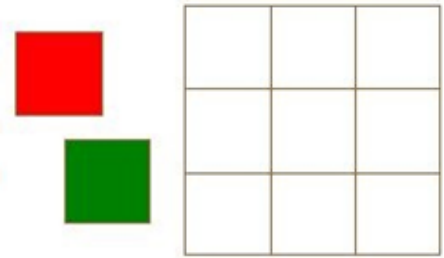
$$1 : 2011 < 1^{2011} < 2011^1 = 1 \cdot 2011 < 1 + 2011$$

Άρα ο μεγαλύτερος αριθμός είναι $1 + 2011 = 2012$.

Σωστό το Δ

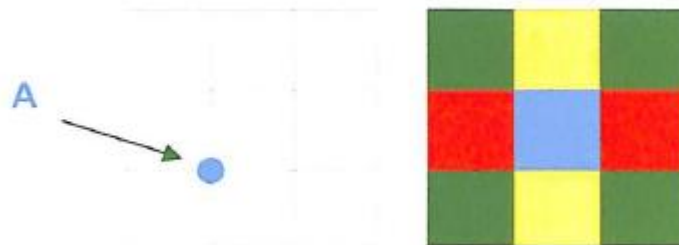
Ερώτηση 5

Ένα καγκουρό θέλει να χρωματίσει τα εννέα τετραγωνάκια ενός τετραγώνου διαστάσεων 3×3 , έτσι ώστε τα τετραγωνάκια που έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή να είναι διαφορετικού χρώματος. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων που πρέπει να χρησιμοποιήσει;



- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 6 E) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση



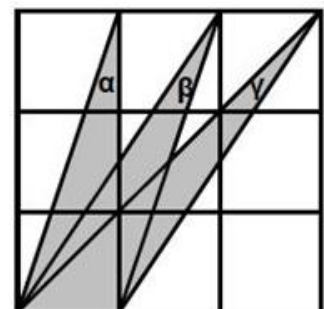
Επειδή υπάρχει η κορυφή A που μοιράζεται σε τέσσερα τετραγωνάκια, θα χρειαστούν τουλάχιστον τέσσερα χρώματα (τα τρία δεν αρκούν). Με τέσσερα χρώματα το καγκουρό μπορεί να πετύχει τον στόχο του.

Σωστό το B

Ερώτηση 6

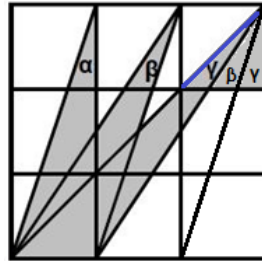
Στο 3×3 τετράγωνο της διπλής εικόνας, πόσο είναι το άθροισμα των γωνιών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$;

- A) 30° B) 45° Γ) 60° Δ) 90°
 E) κανένα από τα προηγούμενα



Λύση

Αν ενώσουμε τις γωνίες α , β και γ σε ένα τετράγωνο θα έχουμε το παρακάτω σχήμα:

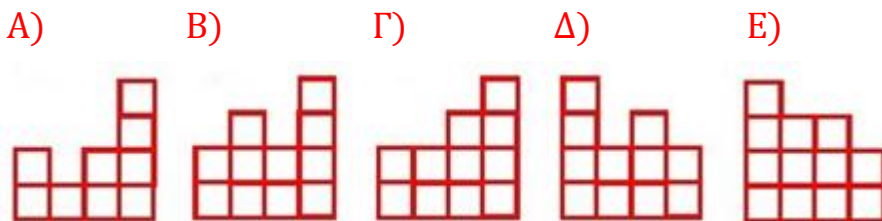
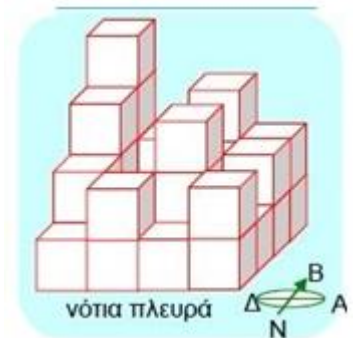


Η διαγώνιος όμως του τετραγώνου (με μπλε χρώμα) διχοτομεί την ορθή γωνία του τετραγώνου. Συνεπώς η γωνία που σχηματίζεται από το άθροισμα των γωνιών α , β και γ είναι $90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Σωστό το Β

Ερώτηση 7

Η εικόνα δεξιά δείχνει μία αεροφωτογραφία ενός οικοδομικού τετραγώνου. Τι θα δούμε αν κοιτάξουμε το οικοδομικό τετράγωνο από την βορινή του πλευρά;



Λύση

Όταν κοιτάξουμε από τη βορινή πλευρά το ψηλό τετραώροφο κτήριο που τώρα φαίνεται στο πάνω αριστερά μέρος της αεροφωτογραφίας, θα το δούμε στο δεξί μας χέρι. Δίπλα του είναι ένα κτήριο δύο ορόφων, μετά ένα τριών ορόφων και τέλος ένα του ενός ορόφου. Επίσης, πίσω από τα κτήρια μας, όπως κοιτάμε από τη βορινή πλευρά, δεν υπάρχει ψηλότερο κτήριο ώστε να φαίνεται το πάνω του μέρος. Συμπεραίνουμε ότι από την βορινή πλευρά και από τα δεξιά προς τα αριστερά βλέπουμε κτήρια 4, 2, 3 και 2 ορόφων αντίστοιχα.

Σωστό το Β

Ερώτηση 8

Ο Πυθαγόρας έγραψε στη σειρά 300 αριθμούς. Οι πρώτοι πέντε είναι οι 1, -1, -1, 1, -1. Από εκεί και πέρα ο κάθε αριθμός είναι ίσος με το γινόμενο των δύο προηγούμενων του. Πόσο είναι το άθροισμα των 300 αριθμών που έγραψε ο Πυθαγόρας;

- A) -150 B) -100 Γ) 0 Δ) 100 E) 150

Λύση

Ο έκτος αριθμός είναι ο $1 \cdot (-1) = -1$. Δηλαδή οι 6 πρώτοι αριθμοί είναι οι:

$$1, -1, -1, 1, -1, -1$$

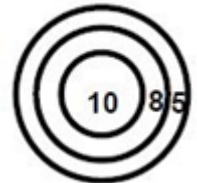
Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται περιοδικά η τριάδα 1, -1, -1. Αυτό σημαίνει ότι οι 300 αριθμοί είναι απλά 100 επαναλήψεις της τριάδας 1, -1, -1, με άθροισμα

$1 + (-1) + (-1) = 1 - 1 - 1 = -1$. Άρα το άθροισμα των 300 αριθμών είναι τελικά $100 \cdot (-1) = -100$.

Σωστό το Β

Ερώτηση 9

Ο Απόλλωνας με τα βέλη του πετυχαίνει κάθε φορά είτε 5, είτε 8, είτε 10 πόντους στον στόχο του. Πέτυχε 8 πόντους όσες φορές πέτυχε 10 πόντους. Συνολικά μάζεψε 99 πόντους. Πόσα βέλη έριξε;



- A) 8 B) 9 Γ) 12 Δ) 15 E) 18

Λύση

Αν έριξε 3 βέλη στους 10 και στους 8 πόντους, έχουμε ότι ο Απόλλωνας μάζεψε:

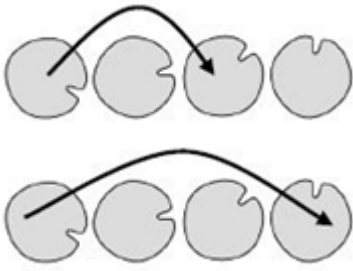
$$3 \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 30 + 24 = 54 \text{ πόντους}$$

Άρα αφού μάζεψε συνολικά 99 πόντους μένουν άλλοι $99 - 54 = 45$ πόντοι.

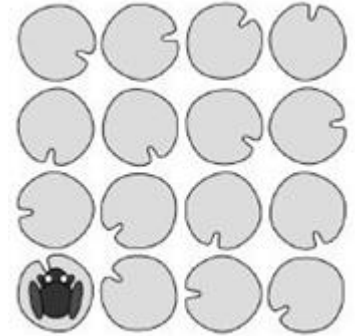
Δηλαδή έριξε $45 : 5 = 9$ βέλη. Άρα συνολικά έριξε $3 + 3 + 9 = 15$ βέλη.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 10



Σε μία λίμνη υπάρχουν 16 νούφαρα, όπως δείχνει η εικόνα. Σε ένα από τα γωνιακά νούφαρα στέκεται ένας βάτραχος. Ο βάτραχος πηδάει από νούφαρο σε νούφαρο προχωρώντας οριζόντια

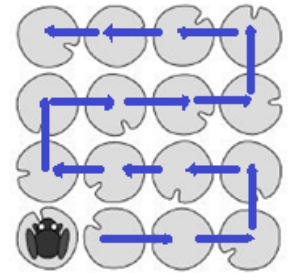


ή κάθετα. Σε κάθε πήδημα περνάει πάνω από ένα ή από δύο νούφαρα και ποτέ δεν επισκέπτεται το ίδιο νούφαρο δύο φορές. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από νούφαρα που μπορεί να επισκεφθεί ο βάτραχος, συμπεριλαμβανομένου και αυτού που βρίσκεται τώρα;

- A) 16 B) 15 Γ) 14 Δ) 13 E) 12

Λύση

Ο βάτραχος θα περάσει και από τα 16 νούφαρα μαζί με αυτό που βρίσκεται τώρα, ακολουθώντας την διπλανή διαδρομή.



Σωστό το A

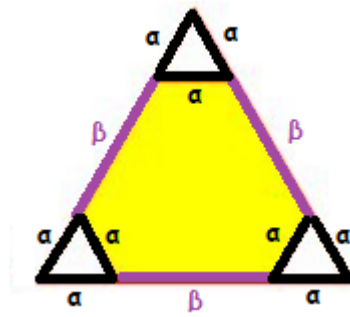
Ερώτηση 11

Κόβουμε με το ψαλίδι τρία ίδια ισόπλευρα τρίγωνα από τις γωνίες ενός μεγάλου ισόπλευρου τριγώνου που έχει πλευρά μήκους 6 μέτρων. Τα τρία μικρά τρίγωνα μαζί έχουν συνολική περίμετρο όσο το κίτρινο εξάγωνο που σχηματίστηκε. Πόσο είναι το μήκος κάθε πλευράς ενός από τα μικρά τρίγωνα;



- A) 1 μέτρο B) 1,2 μέτρα Γ) 1,25 μέτρα Δ) 1,5 μέτρα E) 2 μέτρα

Λύση



- Περίμετρος τριών μικρών τριγώνων = $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 6\alpha$
- Περίμετρος κίτρινου εξάγωνου = $\beta + \beta + \beta = 3\beta$

Αφού οι περίμετροι των τριών μικρών τριγώνων έχουν ίδια περίμετρο με το κίτρινο εξάγωνο που σχηματίστηκε θα έχουμε:

$$6\alpha = 3\beta \Rightarrow \frac{6\alpha}{3} = \frac{3\beta}{3} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

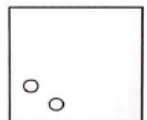
Το εξωτερικό μεγάλο τρίγωνο έχει πλευρά $2\alpha + \beta = 6$. Όμως από πριν ισχύει ότι $\beta = 2\alpha$ οπότε αν κάνουμε αντικατάσταση έχουμε:

$$2\alpha + 2\alpha = 6 \Rightarrow 4\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ μέτρο}$$

Σωστό το Δ

Ερώτηση 12

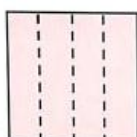
Ο κύριος Τρυπητήρης δίπλωσε ένα χαρτί. Μετά έκανε μία τρύπα στο χαρτί. Όταν το ξεδίπλωσε έβλεπε την εικόνα δεξιά. Πώς δίπλωσε το χαρτί του ο κύριος Τρυπητήρης;



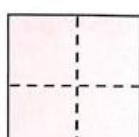
A)



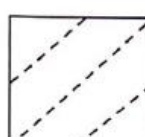
B)



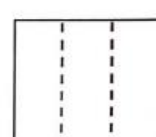
Γ)



Δ)

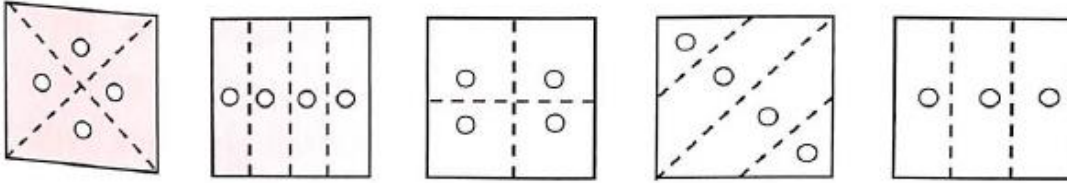


E)



Λύση

Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν πως φαίνεται το χαρτί μετά το ξεδίπλωμα. Από αυτές μόνο η τέταρτη ταιριάζει στο σχήμα.



Σωστό το Δ

Ερώτηση 13

Κάθε γράμμα της λέξης ΣΩΚΡΑΤΗΣ είναι ένα από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 ή 7. Διαφορετικά γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά ψηφία. Αν ο αριθμός ΣΩΚΡΑΤΗΣ είναι περιττός και είναι πολλαπλάσιο του 3, ποιο ψηφίο αντιστοιχεί στο Σ;



- A) 1 B) 3 Γ) 5 Δ) 7
 E) δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι

Λύση

Αφού ο αριθμός ΣΩΚΡΑΤΗΣ είναι περιττός, το τελευταίο ψηφίο Σ είναι 1, 3, 5 ή 7. Ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 3, ακριβώς όταν το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 3.

Έχουμε:

$$\Sigma + \Omega + K + P + A + T + H = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Οπότε μαζί με το Σ, θα έχουμε 28+3 ή 28+5 ή 28+7. Άρα το Σ είναι ο αριθμός 5 διότι 28 + 5 = 33 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 33.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 14

Μία Λερναία Ύδρα έχει 5 κεφάλια. Αν της κόψουν ένα κεφάλι, τότε φυτρώνουν 5 καινούργια. Ο Ηρακλής της έκοψε συνολικά 6 κεφάλια. Πόσα κεφάλια είχε στο τέλος η Λερναία Ύδρα;

- A) 25 B) 28 Γ) 29 Δ) 30 Ε) 35

Λύση

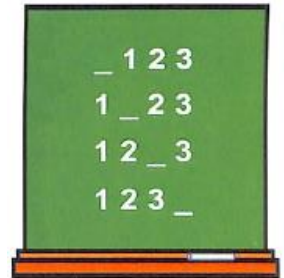
Η Λερναία Ύδρα είχε 5 κεφάλια στην αρχή.

- Ο Ηρακλής της κόβει το πρώτο κεφάλι οπότε έχει τώρα $4+5=9$ κεφάλια.
- Της κόβει το δεύτερο κεφάλι οπότε έχει τώρα $8+5=13$ κεφάλια.
- Της κόβει το τρίτο κεφάλι οπότε έχει τώρα $12+5=17$ κεφάλια
- Της κόβει το τέταρτο κεφάλι οπότε έχει $16+5=21$ κεφάλια
- Της κόβει το πέμπτο κεφάλι οπότε έχει $20+5=25$ κεφάλια
- Της κόβει το έκτο κεφάλι οπότε έχει $24+5=29$ κεφάλια.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 15

Στον πίνακα είναι γραμμένος ο αριθμός 123. Θέλουμε να προσθέσουμε ένα ακόμη ψηφίο ώστε να γίνει τετραψήφιος αριθμός. Το νέο ψηφίο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από το 1 έως το 9 και μπορεί να μπει σε οποιαδήποτε θέση. Πόσους τέτοιους **διαφορετικούς** τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε;



- A) 27 B) 33 Γ) 36 Δ) 40
Ε) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Αριθμός _ 1 2 3: 1123, 2113, 3123, ..., 9123 (9 αριθμοί)

Αριθμός 1 _ 2 3: 1223, 1323, 1423, ..., 1923 (εξαιρείται το 1 διότι δίνει 1123 που είχαμε και πριν) (8 αριθμοί)

Αριθμός 1 2 _ 3: 1213, 1223, ..., 1293 (εξαιρείται το 2 διότι δίνει 1223 που είχαμε και πριν) (8 αριθμοί)

Αριθμός 1 2 3 _: 1231, 1232, 1234, ..., 1239 (εξαιρείται το 3 διότι δίνει 1233 που είχαμε και πριν) (8 αριθμοί)

Άρα συνολικά έχουμε $9 + 8 + 8 + 8 = 33$ τετραψήφιοι.

Σωστό το Β

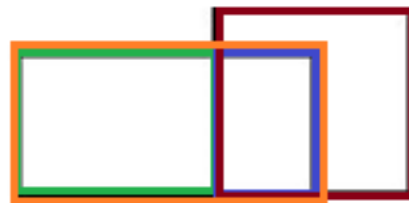
Ερώτηση 16

Πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα συνολικά υπάρχουν στο διπλανό σχήμα;

- A) 0 B) 1 Γ) 2 Δ) 4 E) 5



Λύση

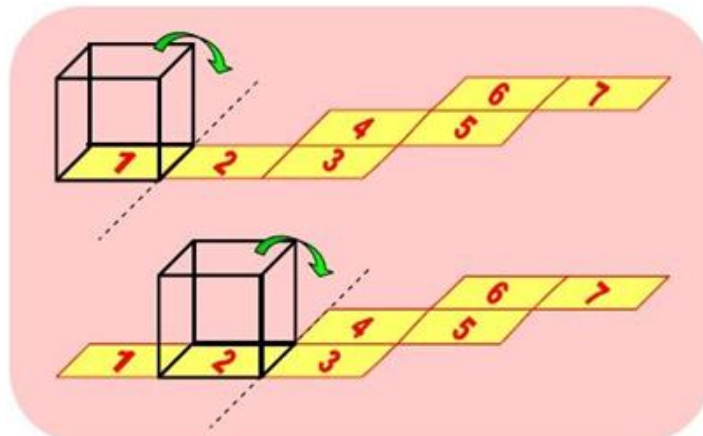


Έχουμε 4 ορθογώνια παραλληλόγραμμα, καθώς λαμβάνουμε υπόψη και το γεγονός ότι το τετράγωνο είναι και ορθογώνιο παραλληλόγραμμα.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 17

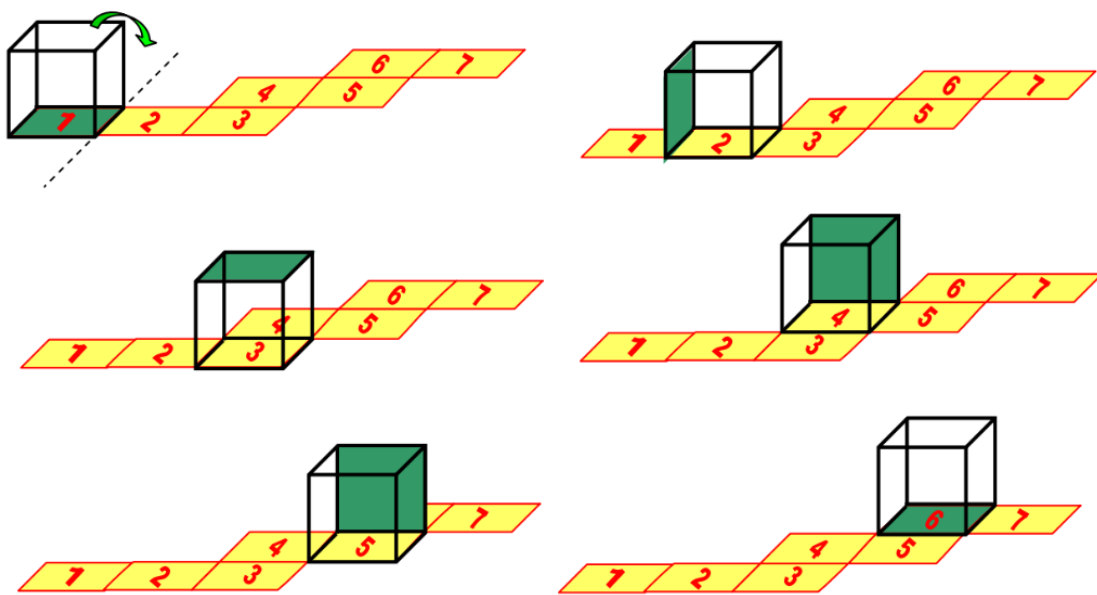
Κυλάμε έναν κύβο στο επίπεδο, στρίβοντάς τον κατά μήκος μιας ακμής του. Ο κύβος παίρνει διαδοχικά τις θέσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6 και 7 με αυτήν τη σειρά. Η έδρα που ήταν αρχικά η βάση του κύβου, πότε θα ξαναβρεθεί στη βάση του;



- A) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 3
- B) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 4
- Γ) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 5
- Δ) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 6
- Ε) όταν ο κύβος φτάσει στη θέση 7

Λύση

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις διαδοχικές θέσεις του κύβου.



Σωστό το Δ

Ερώτηση 18

Ο Άλκης διάλεξε τρεις από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Μετά πολλαπλασίασε τους τρεις αριθμούς που διάλεξε. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς αποκλείεται να είναι το γινόμενο που βρήκε;

- A) 27
- B) 35
- Γ) 39
- Δ) 64
- Ε) 288

Λύση

Οι διαιρέτες του 39 είναι 1, 3, 13 και 39. Άρα ο μόνος τρόπος είναι $1 \cdot 3 \cdot 13$. Όμως οι αριθμοί 1, 3, 13 δεν είναι μέσα στους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Για τους υπόλοιπους αριθμούς έχουμε

$$27 = 1 \cdot 3 \cdot 9, 35 = 1 \cdot 5 \cdot 7, 64 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \text{ και } 288 = 4 \cdot 8 \cdot 9$$

Σωστό το Γ

Ερώτηση 19

Είναι γνωστό ότι το βάρος του αλατιού προς το βάρος του καθαρού νερού μέσα στο θαλασσινό νερό έχουν λόγο 7:193. Πόσο ζυγίζει το αλάτι σε 1000 κιλά θαλασσινό νερό;

- A) 35 κιλά B) 186 κιλά Γ) 193 κιλά Δ) 200 κιλά
E) 350 κιλά

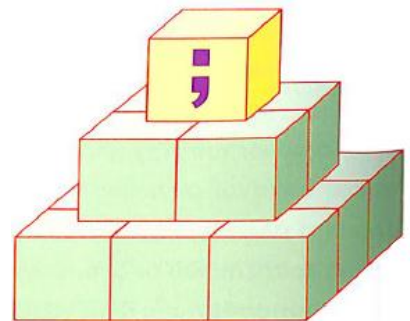
Λύση

Σε $7+193=200$ κιλά θαλασσινό νερό, τα 7 κιλά θα είναι αλάτι και τα 193 κιλά καθαρό νερό. Στα $1000 = 5 \cdot 200$ κιλά, το αλάτι θα είναι $5 \cdot 7 = 35$ κιλά.

Σωστό το Α

Ερώτηση 20

Σε καθένα από τους 14 κύβους της κατασκευής του σχήματος είναι γραμμένος από ένας αριθμός. Στους 9 κύβους της βάσης είναι γραμμένοι, με κάποια σειρά, οι αριθμοί 1 έως 9 από μία φορά ο καθένας. Σε καθένα από τους υπόλοιπους κύβους ο αριθμός που είναι γραμμένος στον κύβο ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών στους κύβους που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός που μπορεί να έχει ο κύβος στην κορυφή;



- A) 60 B) 80 Γ) 84 Δ) 98 E) 104

Λύση

Στους 4 κύβους στο πιο πάνω επίπεδο είναι γραμμένοι οι αριθμοί $\alpha + \beta + \delta + \varepsilon$ κτλ.

Ο αριθμός ε εμφανίζεται και στους τέσσερις αυτούς κύβους.

Οι αριθμοί $\beta, \delta, \zeta, \theta$ σε δύο κύβους και οι αριθμοί $\alpha, \gamma, \eta, \iota$ σε έναν κύβο. Στον κύβο της κορυφής έχουμε $4\varepsilon + 2(\beta + \delta + \zeta + \theta) + (\alpha + \gamma + \eta + \iota)$.

α	β	γ
δ	ε	ζ
η	θ	ι

Πρέπει το παραπάνω άθροισμα να είναι μέγιστο. Συνεπώς αρχικά θέτουμε $\varepsilon = 9$ οπότε οι αριθμοί $\beta, \delta, \zeta, \theta$ θα είναι οι 8, 7, 6 ή 5 και το άθροισμα $\alpha + \gamma + \eta + \iota = 1, 2, 3$ ή 4. Άρα το μεγαλύτερο άθροισμα που μπορούμε να βρούμε είναι:

1	5	2
6	9	7
3	8	4

$$4 \cdot 9 + 2 \cdot (8 + 7 + 6 + 5) + (1 + 2 + 3 + 4) = 98$$

Σωστό το Δ

Ερώτηση 21

Στο κλάσμα $\frac{K \cdot A \cdot \Gamma \cdot K \cdot O \cdot Y \cdot P \cdot O}{\Sigma \cdot K \cdot Y \cdot \Lambda \cdot O \cdot \Sigma}$ τα γράμματα αντιστοιχούν σε ψηφία διαφορετικά από το 0. Ίδια γράμματα αντιστοιχούν σε ίδια ψηφία και διαφορετικά γράμματα σε διαφορετικά ψηφία. Ποια είναι η μικρότερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το κλάσμα;

- A) $\frac{2}{21}$ B) $\frac{5}{24}$ Γ) $\frac{15}{72}$ Δ) $\frac{12}{81}$ E) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Για να πάρει όσο το δυνατόν μικρότερη τιμή το κλάσμα, θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος από τον αριθμητή. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{K \cdot A \cdot \Gamma \cdot K \cdot O \cdot Y \cdot P \cdot O}{\Sigma \cdot K \cdot Y \cdot \Lambda \cdot O \cdot \Sigma} = \frac{A \cdot \Gamma \cdot K \cdot P \cdot O}{\Sigma \cdot \Lambda \cdot \Sigma} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{5}{27}$$

Δηλαδή ξεκινάμε τοποθετώντας τους μεγαλύτερους αριθμούς στον παρονομαστή και τους μικρότερους στον αριθμητή με οποιαδήποτε σειρά, έχοντας όμως υπόψη ότι ίδιο γράμμα αντιστοιχεί στον ίδιο αριθμό.

Σωστό το Ε