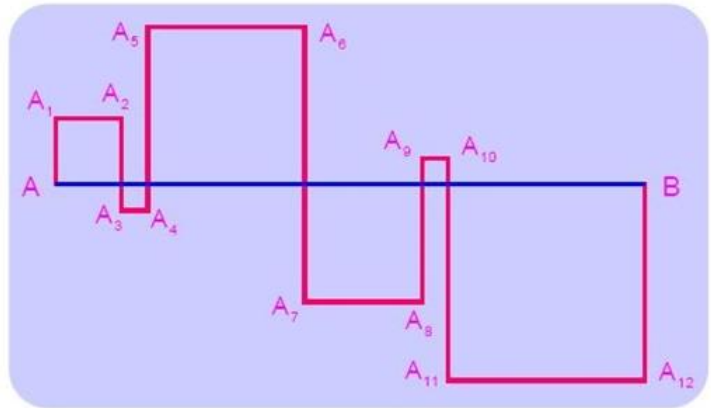


9^ο φύλλο - Επιλεγμένα θέματα διαγωνισμών

Απαντήσεις

Ερώτηση 1

Σχηματίζουμε τετράγωνα των οποίων η μία πλευρά είναι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Έτσι σχηματίζεται μία τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2\dots A_{12}B$ (βλέπε σχήμα). Αν το AB έχει μήκος 24 εκατοστά, πόσο είναι το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $AA_1A_2\dots A_{12}B$;



- A) 48 εκατ. B) 72 εκατ. Γ) 96 εκατ. Δ) 56 εκατ. E) 106 εκατ.

Λύση

Η κόκκινη γραμμή πάνω στο σχήμα αποτελείται από 3 πλευρές από καθένα από τα τετράγωνα, οπότε το μήκος της θα είναι το $\frac{3}{4}$ του συνολικού αθροίσματος των περιμέτρων τους.

Από την άλλη, η AB αποτελείται από μια πλευρά κάθε τετραγώνου, οπότε το μήκος της AB είναι το $\frac{1}{4}$ του συνολικού αθροίσματος των περιμέτρων τους. Άρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής είναι $3 \cdot (AB) = 3 \cdot 24 = 72$ εκατ.

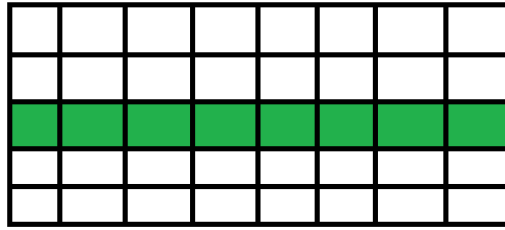
Σωστό το B

Ερώτηση 2

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι χωρισμένο σε 40 ολόιδια τετράγωνα. Το σχήμα έχει περισσότερες από μία γραμμές από τετράγωνα. Ένας ζωγράφος έβαψε με πράσινο χρώμα την μεσαία γραμμή των τετραγώνων. Πόσα τετράγωνα άφησε άβαφα;

- A) 20 B) 30 Γ) 32 Δ) 35 E) 39

Λύση



Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα έχει μήκος 8 τετράγωνο και πλάτος 5 τετράγωνα ώστε να έχουμε $5 \times 8 = 40$ τετράγωνα.

Αν χρωματίσουμε τη μεσαία γραμμή, θα έχουμε χρωματίσει 8 τετράγωνα. Άρα τα τετράγωνα που έμειναν άβαφα είναι $40 - 8 = 32$.

Σωστό το Γ

Ερώτηση 3

Η Υπατία θέλει να γράψει στην πίνακα μερικούς πρώτους αριθμούς από το 2 μέχρι το 100. Θέλει να χρησιμοποιήσει τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 από μία φορά το καθένα. Ποιον αριθμό πρέπει οπωσδήποτε να γράψει στον πίνακα;

- A) 2 B) 5 Γ) 31 Δ) 41 E) 53

Λύση

Αν η Υπατία γράψει οπωσδήποτε στον πίνακα τον αριθμό 41, τότε θα μπορεί να γράψει και τους πρώτους αριθμούς 2, 53 ή 5, 23.

Με τις υπόλοιπες επιλογές που δίνονται, δεν θα μπορούσε να φτιάξει πρώτους αριθμούς.

Για παράδειγμα, αν έγραφε οπωσδήποτε το 2, τότε θα έφτιαχνε τους αριθμούς 2, 31, 45 ή 2, 13, 54 ή 2, 41, 35 κ.ο.κ.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 4

Ο Νίκος και ο Μιχάλης μάζευαν καρύδια κάθε μέρα για επτά συνεχόμενες μέρες, αρχίζοντας από μία Δευτέρα. Την Δευτέρα αυτή μάζεψαν τον ίδιο αριθμό από καρύδια. Κάθε επόμενη μέρα ο Νίκος μάζευε 40 καρύδια περισσότερα από αυτά που είχε μαζέψει την προηγούμενη, ενώ ο Μιχάλης μάζευε τα διπλάσια από αυτά που είχε μαζέψει την προηγούμενη. Στο τέλος της εβδομής μέρας είχαν μαζέψει συνολικά τον ίδιο αριθμό από καρύδια. Πόσα καρύδια μάζεψε ο καθένας τη Δευτέρα;

- A) 3 B) 5 Γ) 7 Δ) 10
E) κανένα από τα προηγούμενα

Λύση

Έστω ότι ο Νίκος και ο Μιχάλης μάζεψαν από x καρύδια τη Δευτέρα. Τότε:

- Ο Νίκος μάζεψε συνολικά:

$$x + (x + 40) + (x + 80) + (x + 120) + (x + 160) + (x + 200) + (x + 240) = 7x + 40(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7x + 40 \cdot 21 = 7x + 840$$

καρύδια

- Ο Μιχάλης μάζεψε συνολικά:

$$x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x + 64x = x(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) = 127x$$

καρύδια

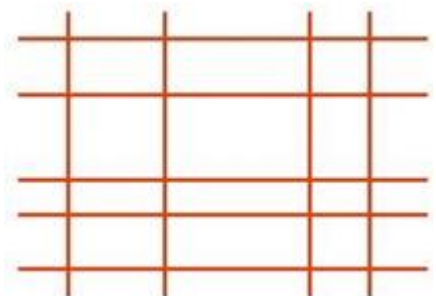
Το πρόβλημα δίνει ότι $7x + 840 = 127x$. Λύνουμε την εξίσωση οπότε έχουμε:

$$120x = 840 \Rightarrow x = 7$$

Σωστό το Γ

Ερώτηση 5

Ζωγραφίζοντας 9 ευθείες (5 οριζόντιες και 4 κάθετες) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σχήμα με 12 κουτάκια. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει 6 οριζόντιες και 3 κάθετες ευθείες, θα κατασκευάζαμε μόνο 10 κουτάκια. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός από κουτάκια που μπορούμε να κατασκευάσουμε με 15 ευθείες;



- A) 22 B) 30 Γ) 36 Δ) 40 E) 42

Λύση

Απλά και Κατανοητά η Γνώση

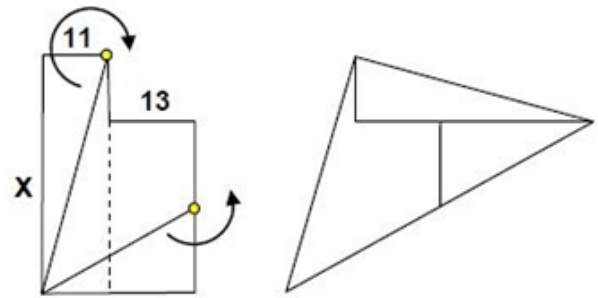
Είναι εύκολο να δούμε ότι για ένα σύνολο γραμμών, ο μεγαλύτερος αριθμός από κουτάκια προκύπτει όταν οι οριζόντιες και οι κάθετες γραμμές είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά.

Αν ο συνολικός αριθμός γραμμών είναι 15, οι γραμμές 7 και 8 είναι ένα τέτοιο ζευγάρι. Τότε το σχέδιο μας θα έχει 6 γραμμές και 7 στήλες (ή 7 γραμμές και 6 στήλες) οπότε τα κουτάκια είναι $6 \cdot 7 = 42$.

Σωστό το Ε

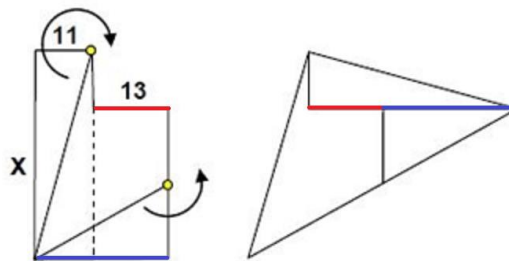
Ερώτηση 6

Το σχήμα δίπλα αποτελείται από δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το μήκος δύο πλευρών του είναι 11 και 13, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Κόβουμε τώρα το παραλληλόγραμμο σε τρία μέρη και με τα κομμάτια φτιάχνουμε το τρίγωνο της εικόνας. Πόσο είναι το μήκος X;



- A) 36 B) 37 Γ) 38 Δ) 39 E) 40

Λύση

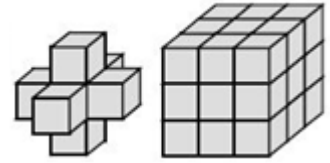


Κοιτάζοντας στο σχήμα παρατηρούμε ότι το μπλε κομμάτι ισούται με $11+13=24$. Το κόκκινο κομμάτι είναι 13. Άρα το μήκος X ισούται με $X=13+24=37$.

Σωστό το Β

Ερώτηση 7

Η αριστερή εικόνα είναι μία κατασκευή που αποτελείται από 7 όμοιους κύβους. Πόσους τέτοιους κύβους χρειαζόμαστε να συμπληρώσουμε στην κατασκευή ώστε να φτιάξουμε τον μεγάλο κύβο στην δεξιά εικόνα;



- A) 12 B) 14 Γ) 16 Δ) 18 Ε) 20

Λύση

Για να φτιάξουμε έναν κύβο με 3 κύβους στην άκρη, χρειαζόμαστε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ κύβους. Στην εικόνα έχουν χρησιμοποιηθεί 7 μικροί κύβοι. Άρα ο αριθμός των κύβων που απαιτούνται είναι $27 - 7 = 20$.

Σωστό το Ε

Ερώτηση 8

Στον πίνακα είναι γραμμένοι αριθμοί αρχίζοντας από τους 6, 8, 8, 4, 2 και λοιπά. Ο άνθρωπος που τους έγραψε, ακολούθησε τον εξής κανόνα: Πρώτα έγραψε τους 6 και 8. Ο κάθε επόμενος είναι το ψηφίο των μονάδων στο γινόμενο των δύο προηγούμενων του αριθμών. Για παράδειγμα ο τρίτος είναι ο 8 διότι $6 \times 8 = 18$, και το ψηφίο των μονάδων είναι 8. Ποιο ψηφίο βρίσκεται στην 2017^η θέση;

- A) 2 B) 3 Γ) 4 Δ) 6 Ε) 8

Λύση

Βρίσκουμε τον τέταρτο αριθμό. Επειδή το γινόμενο των δύο προηγούμενων του δηλαδή των 8 και 8, είναι $8 \times 8 = 64$, και το ψηφίο των μονάδων του 64 είναι 4. Άρα ο τέταρτος αριθμός είναι το 4.

Βρίσκουμε τον πέμπτο αριθμό. Είναι $8 \times 4 = 32$ και αφού το ψηφίο των μονάδων είναι 2, ο πέμπτος αριθμός είναι ο 2.

Με παρόμοιο τρόπο ο έκτος αριθμός είναι ο 8 διότι $4 \times 2 = 8$.

Αν προχωρήσουμε θα δούμε ότι οι επόμενοι είναι οι 6 και 8, δηλαδή ίδιοι με τους 2 αρχικούς. Άρα

6, 8, 8, 4, 2, 8 6, 8, 8, 4, 2, 8 6, 8, 8, 4, 2, 8

Αφού $2016 = 6 \times 336$ μετά από 336 επαναλήψεις, ο επόμενος θα είναι ο 6.

Σωστό το Δ

Απλά και Κατανοητά η Γνώση

Ερώτηση 9

Ένας ποδηλάτης κινείται με ταχύτητα 5 μέτρων ανά δευτερόλεπτο. Καθεμία από τις ρόδες του έχει περίμετρο 125 εκατοστά του μέτρου. Πόσες πλήρεις περιστροφές θα κάνει κάθε ρόδα σε 5 δευτερόλεπτα;



- A) 4 B) 5 Γ) 10 Δ) 20 Ε) 25

Λύση

Σε 5 δευτερόλεπτα ο ποδηλάτης θα διανύσει $5 \times 5 = 25$ μέτρα, που είναι 2500 εκατοστά του μέτρου. Αφού η ρόδα έχει περίμετρο 125 εκατοστά θα κάνει $2500:125=20$ περιστροφές.

Σωστό το Δ

Ερώτηση 10

Βάφουμε όλους τους θετικούς ακέραιους 1, 2, 3, ... σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

- (α) κάθε αριθμός βάφεται είτε κόκκινο είτε πράσινο χρώμα,
- (β) το άθροισμα δύο διαφορετικών κόκκινων αριθμών είναι κόκκινος αριθμός,
- (γ) το άθροισμα δύο διαφορετικών πράσινων αριθμών είναι πράσινος αριθμός.

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει τέτοια βαφή;

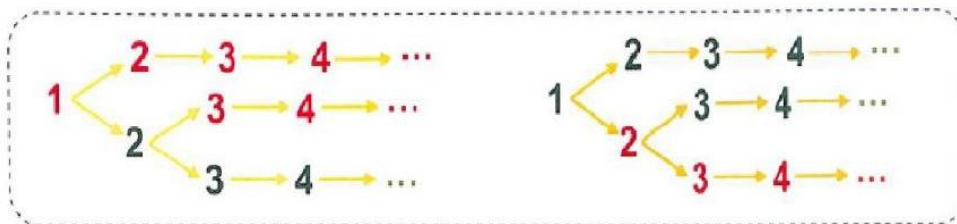
- A) 0 B) 2 Γ) 4 Δ) 6 Ε) περισσότερους από 6

Λύση

Γενικά ισχύει ότι:

Αν ο αριθμός 1 είναι κόκκινος και αν κάποιος αριθμός N είναι και αυτός κόκκινος, τότε όλοι οι αριθμοί από τον N και πέρα θα είναι κόκκινοι. Το ίδιο ισχύει και για τους πράσινους.

Τότε οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε είναι:



Δηλαδή συνολικά 6 περιπτώσεις.

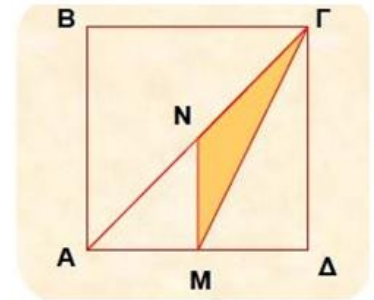
Σωστό το Δ

Απλά και Κατανοητά η Γνώση

Ερώτηση 11

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά με μήκος 4 μέτρα. Το Μ είναι το μέσον του ΑΔ και το Ν είναι το μέσο του ΑΓ. Πόσο είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΓΜΝ;

- A) 1 τ.μ. B) 1,5 τ.μ. Γ) 2 τ.μ. Δ) 2,5 τ.μ.
 Ε) κανένα από τα προηγούμενα



Λύση

Τα τρίγωνα ΜΝΓ και ΜΝΑ έχουν ίδιο εμβαδόν γιατί η διάμεσος ΜΝ του τριγώνου ΜΑΓ το χωρίζει σε δύο μέρη με ίδια εμβαδά (τα τρίγωνα αυτά έχουν ίσες βάσεις, ΑΝ=ΝΓ και κοινό ύψος από το Μ στη βάση ΑΓ)

Άρα

$$\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΝ} = \frac{\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΑ}}{2}$$

Όμως

$$\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΑ} = \frac{1}{2} AM \cdot ΓΔ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

Άρα

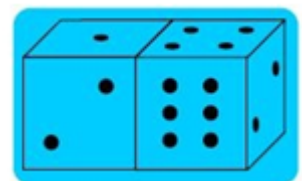
$$\text{Εμβαδόν}_{ΜΓΝ} = \frac{4}{2} = 2 \text{ τ. μ.}$$

Σωστό το Γ

Ερώτηση 12

Ποιο είναι το άθροισμα των αριθμών σε όλες τις έδρες που δεν φαίνονται στην διπλανή εικόνα δύο ζαριών;

- A) 15 B) 12 Γ) 7 Δ) 27
 Ε) άλλη απάντηση



Λύση

1^{ος} τρόπος:

Στο δεξί ζάρι, οι αριθμοί στις έδρες που δεν φαίνονται είναι 1, 3 και 5. Στο αριστερό ζάρι, οι αριθμοί στην πλευρά που δεν φαίνονται είναι 5, 6, 4 και 3. Το άθροισμα είναι $1+3+5+5+6+4+3=27$

2^{ος} τρόπος:

Το συνολικό άθροισμα όλων των σημείων και στα 2 ζάρια είναι $7 \times 3 \times 2 = 42$. Το άθροισμα που βλέπουμε είναι $1+2+2+4+4+6=15$ οπότε το άθροισμα που δεν φαίνεται είναι $42 - 15 = 27$

Σωστό το Δ