ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΜΠ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
(2006/2007-Φυλλάδιο 2-Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Euler με μετασχηματισμό)

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

(1) $(1+x)^2 y^{//} - 3(1+x)y^{/} + 4y = 0$

Υποδειγματική Λύση

(1) $(1+x)^2 y^{//} - 3(1+x)y^{/} + 4y = 0$

Η εξίσωση (1) είναι μια διαφορική εξίσωση Euler.Μια τέτοια εξίσωση λύνετε μέσω του μετασχηματισμού :

$1 + x = e^t \rightarrow dx = e^t dt$ (2)

Ακόμα

$y(x) = y(e^t - 1) = Y(t) \rightarrow y = Y$ (3)

$y^{/}(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx} = Y^{/}e^{-t} \rightarrow y^{/} = Y^{/}e^{-t}$ (4)

$y^{//}(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(Y^{/}e^{-t})}{dx} = \frac{d(Y^{/}e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx} = (Y^{//}e^{-t} - Y^{/}e^{-t})e^{-t} \rightarrow$

$y^{//} = (Y^{//} - Y^{/})e^{-2t}$ (5)

Επομένως η (1) από (2),(3),(4),(5) γίνετε :

$(1+x)^2 y^{//} - 3(1+x)y^{/} + 4y = 0 \rightarrow$

$e^{2t}(Y^{//} - Y^{/})e^{-2t} - 3e^t Y^{/} e^{-t} + 4Y = 0 \rightarrow$

$Y^{//} - 4Y^{/} + 4Y = 0$

Με χαρακτηριστική εξίωση :

$k^2 - 4k + 4 = 0$ και ρίζες $k = 2$ (διπλή) και επομένως :

(6) $Y = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$

Και με αντικατάσταση της (2) :

$y = [c_1 + c_2(x+1)]e^{2t}$