ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β,Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:*

i) τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά,

ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,

iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

2. *Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.*

3. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B} = ω$, $\hat{Γ} = φ$ και την περίμετρό του δ.*

4. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β,Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.*

5. *Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).*

6. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

7. *Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

8. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, $ΓH_3$ τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,

ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,

iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, $i = 1, 2, 3$ είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).