Θέμα 4 **GI_A_GEO_4_3767**

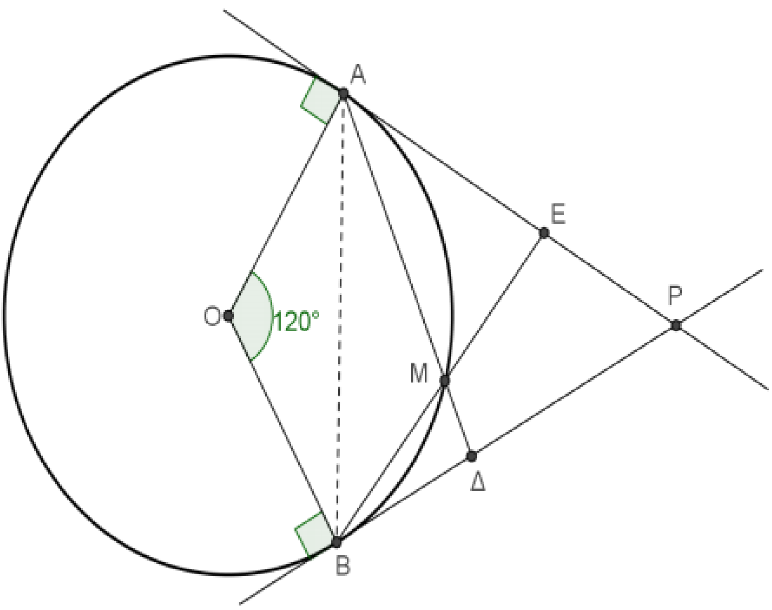
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του ΑΟΒ ίση με 120^0 . Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο Ρ. Θεωρούμε σημείο Μ του τόξου ΑΒ και φέρουμε τις χορδές ΑΜ και ΒΜ, οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τις ΡΒ και ΡΑ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

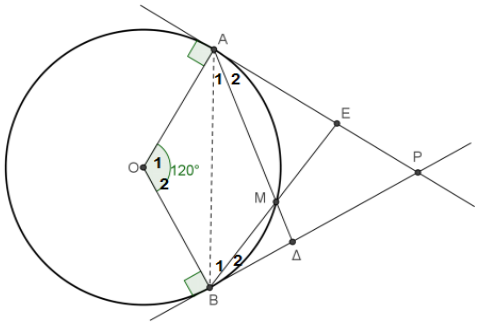
γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΡΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 9)



Λύση:

α) Στο τετράπλευρο ΟΑΡΒ είναι $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^o$ και $\hat{O}=120^o$ άρα $\hat{P} = 60^o$

Στο τρίγωνο ΑΡΒ είναι ΡΑ = ΡΒ ως εφαπτόμενα τμήματα και $\hat{P} = 60^o$ άρα είναι ισόπλευρο.



β) $\hat{B}_1 = \hat{A}_2$ γιατί η $\hat{A}_2$ είναι γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{B}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο Άρα

$$M\hat{A}B + M\hat{B}A = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{A}_2 + \hat{A}_1 = B\hat{A}P = 60^o$$

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΡ έχουν $\widehat{P} = \widehat{B} = 60^o$, ΑΒ = ΡΒ (το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισόπλευρο) και $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$ (γιατί η $\hat{B}_2$ είναι γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο ίδιο τόξο). Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΡ είναι ίσα (Γ-Π-Γ).

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός