ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{595}{598} \cdot \frac{597}{600} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{596}{599} \cdot \frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, **(β)** $\mathrm{A} < \dfrac{1}{5990}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.