# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
## 27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
# "Ο Αρχιμήδης"
## ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

### Θέματα μικρών τάξεων

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1**

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa + 3\lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2**

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\text{ΑΒ} = \alpha$ και $\text{ΒΓ} = \beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\text{ΑΕ} = \text{ΑΟ}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\text{ΒΖ} = \text{ΒΟ}$. Αν το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

**(i)** $\beta = \alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\text{ΑΖ} = \text{ΕΟ}$, **(iii)** $\text{ΕΟ} \perp \text{ΖΔ}$.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3**

Αν $a, b$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $x, y$ και $z$ έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των $x, y$ και $z$ αληθεύει η ισότητα;

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4**

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3$ ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία $\varepsilon_2$ να έχει την ίδια απόσταση $\alpha$ από τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_3$. Τοποθετούμε 5 σημεία $\text{Μ}_1, \text{Μ}_2, \text{Μ}_3, \text{Μ}_4$ και $\text{Μ}_5$ πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3$, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\text{Μ}_1, \text{Μ}_2, \text{Μ}_3, \text{Μ}_4$ και $\text{Μ}_5$ με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**(α)** $\text{Μ}_1, \text{Μ}_2, \text{Μ}_3 \in \varepsilon_2$, $\text{Μ}_4 \in \varepsilon_1$ και $\text{Μ}_5 \in \varepsilon_3$.

**(β)** $\text{Μ}_1, \text{Μ}_2 \in \varepsilon_1$, $\text{Μ}_3, \text{Μ}_4 \in \varepsilon_3$ και $\text{Μ}_5 \in \varepsilon_2$.