



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
28^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3 y^2 (2y - x) = x^2 y^4 - 36.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1), A_2(40,2), \dots, A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "καλό", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\dots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "καλό", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "καλό" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "καλών" σημείων και το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L . Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο N . Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

$$MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \text{ ή } Z \equiv O),$$

δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC , αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O, R)$ ".

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία