ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ$, στο οποίο η διάμεσος $\mathrm{A\Delta}$ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ στο σημείο E. Οι ευθείες BA και $\mathrm{E\Gamma}$ τέμνονται στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{Z\Delta} \perp \mathrm{BE}$, **(β)** $\mathrm{Z\Delta} = \mathrm{B\Gamma}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu + 1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m > 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***