

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015
Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m, n) με $m \geq n$, που είναι

τέτοια ώστε ο αριθμός $A = (m + n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.

Πρόβλημα 3.

Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB \leq A\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O, R)$. Η κάθετη από την κορυφή A προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ .

(α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.