



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \leq y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, P(1) = 1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB = A\Gamma$) και το ύψος του $\Gamma\Delta$. Ο κύκλος $c_2(\Gamma, \Gamma\Delta)$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K , την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Z και τον κύκλο $c_1(B, B\Delta)$ στο σημείο E . Η DZ τέλος τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο M .

Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\hat{Z}\Delta E = 45^\circ$, (β) Τα σημεία E, M και K βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,
(γ) Η ευθεία BM είναι παράλληλη με την ευθεία $E\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβος θα τον ονομάζουμε "καλό", όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "καλών" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.