ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Οι θετικοί ακέραιοι p,q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p,q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Πρόβλημα 2
Οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z, με $x \neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x+y)^2+(2-xy)=9,$$
$$(y+z)^2-(3+yz)=4.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Πρόβλημα 4.
Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος.