ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a>0>b>c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N}=2017-a^3b-b^3c-c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+\ldots+a_n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+\ldots+a_n$.