ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n),\ n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \dfrac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα $\mathrm{A\Gamma}$ και AB θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Έστω K είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Gamma E}$ και N είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων BKE, έστω c_1, και $\mathrm{\Gamma K\Delta}$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $\mathrm{A, K, N}$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, που αντιστοιχεί στην κορυφή A.

Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Πρόβλημα 3

(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \le i < j \le m$.

(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \ge 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \le i < j \le m$.

Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n \ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n) \le \dfrac{n^2 - 3n}{4}$, για κάθε $n \ge 4$.