ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a,b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E, να αποδείξετε