



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\frac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός \overline{xyz} .

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $B\Delta$ (το Δ είναι σημείο της $A\Gamma$) στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N . Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$.

1. Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα BN , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία A, Λ και M . Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις $M\Gamma$, $A\Gamma$ και το τόξο $\overset{\frown}{AM}$ του κύκλου ω . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

Σημείωση: Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου ω .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες