



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες αληθεύει, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν  $x, y$  είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί  $a_1 = x + y$ ,  $a_2 = x^2 + y^2$  και  $a_4 = x^4 + y^4$  είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $a_5 = x^5 + y^5$  είναι ακέραιος.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε  $\beta = 2\alpha$ . Στο εσωτερικό του θεωρούμε  $N$  κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι  $N \geq 4$ .

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) για το οποίο ισχύει  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Αν  $E$  είναι το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς το  $B$  και  $K$  είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $B\Gamma E$  να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma E$  εφάπτεται στην  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $\Gamma$  και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $B\Gamma K$  εφάπτεται στην  $\Gamma E$  στο σημείο  $\Gamma$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*