



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
78<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1.**

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2,$$

αν δίνεται ότι  $\alpha = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ ,  $\beta = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\gamma = -\frac{18}{2^3}$ ,  $\delta = \frac{1}{2^3}$ .

**Πρόβλημα 2**

Μία ομάδα εργατών τελειώνει το  $\frac{1}{4}$  ενός έργου στο  $\frac{1}{3}$  μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ίδιας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε πολυώνυμο  $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$  όπου οι αριθμοί  $a, b, c$  είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί  $x, y$  είναι θετικοί ακέραιοι με  $x > y$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\frac{P(x) - P(y)}{x - y}$$
 είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός  $P(8)$  είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός  $P(2018)$  είναι πολλαπλάσιο του 3.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = AG$  και  $\hat{A} = 72^\circ$ . Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

**Σημείωση:** Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!