



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
71<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β' Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y, z$  ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y - z} &= x - 2 \\ \sqrt{y^2 - z - x} &= y - 2 \\ \sqrt{z^2 - x - y} &= z - 2,\end{aligned}$$

να αποδείξετε ότι  $x + y + z = 6$  και να προσδιορίσετε τους αριθμούς  $x, y, z$ .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι κύκλοι  $c_1(A, AB)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $R_1 = AB$ ) και  $c_2(A, A\Gamma)$  (με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $R_2 = A\Gamma$ ). Ο κύκλος  $c_1(A, AB)$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$  και την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ . Ο κύκλος  $c_2(A, A\Gamma)$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο σημείο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο σημείο  $N$ .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\Gamma A = \Gamma B$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EKN$  είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει ότι  $x + y = 4$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και έστω  $E$  το μέσο της διχοτόμου  $B\Delta$ . Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AEB$  στο σημείο  $A$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $M$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $ME$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ