



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
73<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Αν  $\alpha \neq 0$  και  $-1 < \alpha < 1$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha,$$

όπου

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2kx - 1 + k^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου  $k$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα  $(0, 5)$  με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

**Πρόβλημα 3**

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους  $x, y$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των  $x, y$  και  $z$  είναι διαιρέτης του 747.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται κύκλος  $c(O, R)$ , τυχούσα χορδή του  $AB$  (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο  $M$  του μικρού τόξου  $AB$ . Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνουν το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $K$  και  $N$ , αντίστοιχα. Οι κύκλοι  $c_1(A, AM)$  και  $c_2(B, BM)$  τέμνονται στο σημείο  $T$ . Να αποδείξετε ότι το σημείο  $T$  είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου  $KMN$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*