ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

3η ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Απρίλιος 2002 ΧΡΟΝΟΣ: 60 ΛΕΠΤΑ

Δοκίμιο για Α', Β', Γ' Λυκείου

Άσκηση 1. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=6 και ΒΓ=5. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε ΒΔ = 1, το μήκος του ΑΔ είναι:

Α. $2\sqrt{5}$ **Β.** $4\sqrt{2}$ **Γ.** 4 **Δ.** $3\sqrt{3}$ **Ε.** 5

Άσκηση 2. Η παραβολή με εξίσωση $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ έχει κορυφή το σημείο (3,1) και περνά από το σημείο (2,0). Το γινόμενο $\alpha\beta\gamma$ ισούται:

Α. 60 **Β.** –60 **Γ.** 48 **Δ.** –48 **Ε.** Κανένα από προηγούμενα

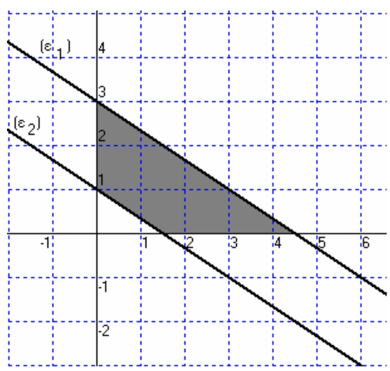
Άσκηση 3. Εάν $\sqrt{\dfrac{\chi}{\psi}\sqrt{\dfrac{\chi}{\psi}\sqrt{\dfrac{\chi}{\psi}}}} = \left(\dfrac{\chi}{\psi}\right)^{\alpha}$ τότε το α ισούται:

Α. $\frac{1}{8}$ **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{3}{4}$ **Δ.** $\frac{3}{8}$ **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 4. Ο μεγάλος μαθηματικός De Morgan έζησε κατά τον 19ο αιώνα μ.χ. Στον τελευταίο χρόνο της ζωής του είπε: «ήμουν χ χρονών το έτος χ^2». Το έτος γέννησης του De Morgan ήταν:

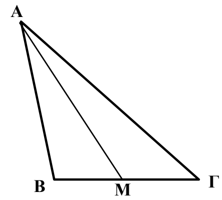
Α. 1806 **Β.** 1822 **Γ.** 1849 **Δ.** 1851 **Ε.** 1853

Άσκηση 5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ευθείες (ε_1): $\psi = -\frac{2}{3}\chi + 3$ και (ε_2): $\psi = -\frac{2}{3}\chi + 1$. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους είναι:



Α. 8 **Β**. $\frac{9}{2}$ **Γ**. $\frac{31}{4}$ **Δ**. 6 **Ε**. Κανένα από τα προηγούμενα.

Άσκηση 6. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, $\widehat{BAM} = 30^0$, ΑΜ διάμεσος, ΑΜ = 8. Το εμβαδόν του τριγώνου $\left(\overset{\Delta}{AM\Gamma}\right)$ ισούται:



Α. 24 **Β**. 7 **Γ**. 12 **Δ**. $3\sqrt{3}$ **Ε**. $4\sqrt{3}$

Άσκηση 7. Ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρίζα της συνάρτησης:

Α. $\chi^4+10\chi^2+1$ **Β**. $\chi^4-10\chi^2+1$ **Γ**. $\chi^4-2\chi^2+3$

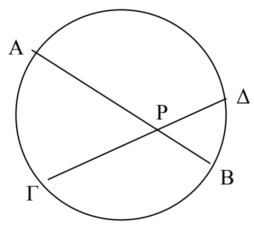
Δ. $\chi^4-10\chi^2+6$ **Ε**. $\chi^4-10\chi^2+10$

Άσκηση 8. Το σημείο Ρ ανήκει στην ευθεία ψ = 5χ +3. Το σημείο Σ έχει συντεταγμένες (3,–2). Αν Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΡΣ, τότε το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία.

Α. $\psi=\frac{5}{2}\chi-\frac{7}{2}$ **Β**. $\psi=5\chi+1$ **Γ**. $\psi=-\frac{1}{5}\chi-\frac{7}{5}$

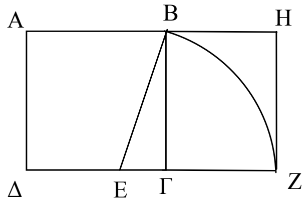
Δ. $\psi=\frac{5}{2}\chi+\frac{1}{2}$ **Ε**. $\psi=5\chi-7$

Άσκηση 9. Στο διπλανό κύκλο τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Delta}$ έχουν μέτρα $\widehat{A\Gamma}=70°$, $\widehat{B\Delta}=20°$. Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ρ η γωνία $\widehat{\Gamma PB}$ ισούται:



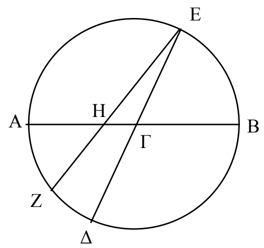
Α. 90° **Β**. 135° **Γ**. 140° **Δ**. 150° **Ε**. 175°

Άσκηση 10. Στο διπλανό σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και ΒΕΖ κυκλικός τομέας μέσα στο ορθογώνιο ΑΗΖΔ. Εάν ΑΔ = 3 ΕΓ, ο λόγος των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΖ και ΑΔ ισούται:



Α. 1 **Β**. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **Γ**. $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ **Δ**. $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$ **Ε**. 2

Άσκηση 11. Στο διπλανό σχήμα ΑΒ, ΔΕ είναι διάμετροι στον κύκλο με κέντρο Γ, Ζ μέσο του τόξου ΑΔ, ΕΖ χορδή του κύκλου που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Αν $\widehat{ΒΓΕ} = 60^0$ η γωνία $\widehat{ΑΗΖ}$ ισούται:



Α. 45° **Β**. 30° **Γ**. 15° **Δ**. 25° **Ε**. Αδύνατο να υπολογιστεί

Άσκηση 12. Ένας ακέραιος αριθμός α διαιρούμενος με το 6 δίνει υπόλοιπο 5, ενώ διαιρούμενος με το 7 δίνει υπόλοιπο 4. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με το 42 είναι:

Α. 9 **Β**. 0 **Γ**. 28 **Δ**. 11 **Ε**. 12

Άσκηση 13. Αν οι αριθμοί μ,ν είναι περιττοί με μ > ν > 1 τότε για την εξίσωση $\chi^2 + 2\mu\chi + 2\nu = 0$ τι ισχύει από τα παρακάτω:

Α. Η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο.

Β. Η εξίσωση έχει ρίζες άρρητες.

Γ. Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Δ. Το άθροισμα των ριζών είναι περιττός αριθμός.

Ε. Το γινόμενο των ριζών είναι πρώτος αριθμός.

Άσκηση 14. Δύο γεωργοί θέλουν να μοιράσουν ένα δοχείο με 10 λίτρα λάδι, έχοντας μόνο βοηθητικά άδεια δοχεία των 5 lt και 3 lt, ώστε ο πρώτος να πάρει 9 lt και ο δεύτερος 1 lt. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός των δοκιμών για να το πετύχουν αυτό:

Α. 6 **Β**. 5 **Γ**. 4 **Δ**. 2 **Ε**. 3

Άσκηση 15. Αν για τη συνάρτηση $\psi = f\left(\chi\right)$, $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι συνθήκες:

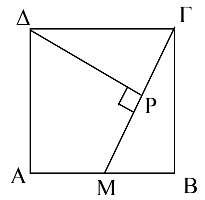
(α) για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ με $\chi_1 \le \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \ge f(\chi_2)$ και

(β) $f(3) = 2$

Τότε η λύση της ανίσωσης $\frac{[f(\chi)]^2 + 4}{4} \le f(\chi)$ είναι:

Α. $\chi = 3$ **Β.** $\chi = 1$ **Γ.** $\chi = 0$ **Δ.** $\chi = 4$ **Ε.** $\chi = 2$

Άσκηση 16. Στο διπλανό σχήμα, ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, πλευράς 1. Εάν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και $\Delta P \perp M\Gamma$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΡ ισούται:



Α. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **Β.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 17. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(\chi) = \left(4 + \frac{1}{\chi^2}\right)\left(6 - \frac{1}{\chi^2}\right)$ ισούται:

Α. 24 **Β.** 10 **Γ.** 2 **Δ.** 25 **Ε.** 8

Άσκηση 18. Εάν $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi + 3}$. Το πλήθος των τιμών του α για τις οποίες ισχύει $f(f(\alpha)) = \alpha$, και $f(\alpha) \ne \alpha$ ισούται:

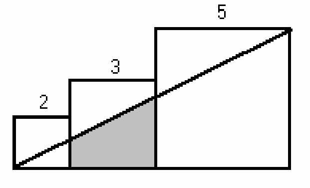
Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 3 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 19. Εάν $\alpha_1 = \frac{1}{1-\chi}$, $\alpha_2 = \frac{1}{1-\alpha_1}$, $\alpha_\nu = \frac{1}{1-\alpha_{\nu-1}}$ *για* $\nu \ge 2$, $\chi \ne 1$, $\chi \ne 0$

Το α_{2002} ισούται με:

Α. $\frac{1}{1-\chi}$ **Β.** χ **Γ.** $-\chi$ **Δ.** $\frac{\chi - 1}{\chi}$ **Ε.** $\frac{1}{\chi}$

Άσκηση 20. Δίνονται τρία τετράγωνα με διαστάσεις όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους ισούται:



Α. $\frac{21}{4}$ **Β.** $\frac{9}{2}$ **Γ.** 5 **Δ.** $\frac{15}{4}$ **Ε.** $\frac{25}{4}$

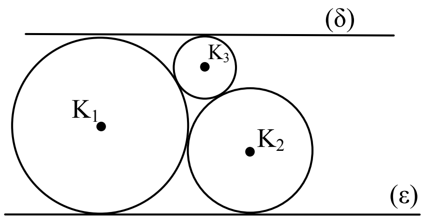
Άσκηση 21. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ>ΓΔ, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ ισούται με το μισό της διαφοράς των βάσεων του και περνά από το σημείο τομής Ε των προεκτάσεων των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου. Η γωνία $\widehat{AEB}$ ισούται:

Α. 130° **Β.** 90° **Γ.** 40° **Δ.** 30° **Ε.** 60°

Άσκηση 22. Εάν (χ,ψ) είναι λύση του συστήματος : $\begin{matrix} \sqrt{\chi-\psi} = \chi+\psi-7 \\ \sqrt{\chi+\psi} = \chi-\psi-1 \end{matrix}$ τότε η τιμή του ψ ισούται:

Α. $\frac{5}{2}$ **Β.** 4 **Γ.** $\frac{13}{2}$ **Δ.** 9 **Ε.** $\frac{13}{5}$

Άσκηση 23. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες (δ) και (ε) είναι παράλληλες, οι τρεις κύκλοι εφάπτονται ανά δύο, η ευθεία (δ) εφάπτεται στους κύκλους με κέντρα K_1, K_3 και η ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους με κέντρα K_1 , K_2 . Αν ο κύκλος με κέντρο K_2 έχει ακτίνα 9 και ο κύκλος με κέντρο K_3 έχει ακτίνα 4 η ακτίνα του κύκλου με κέντρο K_1 ισούται:



Α. 10,4 **Β.** 11 **Γ.** $8\sqrt{2}$ **Δ.** 12 **Ε.** $7\sqrt{3}$

Άσκηση 24. Εάν $\chi^3 = 1+\chi+\chi^2$, τότε το χ^8 είναι ίσο με:

Α. $1+2\chi+2\chi^2$ **Β.** $2+3\chi+4\chi^2$ **Γ.** $4+6\chi+7\chi^2$

Δ. $7+11\chi+13\chi^2$ **Ε.** $13+20\chi+24\chi^2$

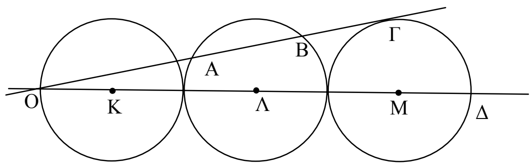
Άσκηση 25. Έστω $\chi = 2^{2002}$. Το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών που υπάρχουν ανάμεσα στους $\sqrt{\chi^2+2\chi+4}$ και $\sqrt{4\chi^2+2\chi+1}$ ισούται:

Α. 2^{2002} **Β.** $2^{2002}+1$ **Γ.** $2^{2002}-1$ **Δ.** $2^{2002}+2$ **Ε.** $2^{2002}-2$

Άσκηση 26. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ=10) και ΒΓ=12. Τα σημεία Σ και Ρ ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έτσι ώστε ΒΣ:ΣΡ:ΡΓ=1:2:1. Τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ είναι το Ε και Ζ αντίστοιχα. Φέρνουμε τις καθέτους από τα σημεία Ε και Ρ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΖ που το τέμνουν στα Μ και Ν αντίστοιχα. Το μήκος του τμήματος ΜΝ ισούται:

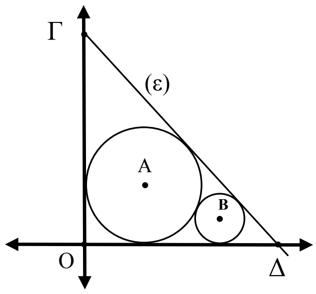
Α. $\frac{9}{\sqrt{13}}$ **Β.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$ **Γ.** $\frac{11}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\frac{12}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\frac{5}{2}$

Άσκηση 27. Οι τρεις κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται, και τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία ΟΔ. Η ευθεία ΟΓ εφάπτεται του (Μ, R) και τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στο σημείο Ο. Το μήκος της χορδής ΑΒ ισούται:



Α. $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)R}{2}$ **Β.** $\frac{2R\sqrt{6}}{3}$ **Γ.** $\frac{13R}{8}$ **Δ.** $\frac{R\sqrt{65}}{5}$ **Ε.** $\frac{8R}{5}$

Άσκηση 28. Ο κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα 3 εφάπτεται του θετικού ημιάξονα των τετμημένων και του θετικού ημιάξονα των τεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύκλος με κέντρο Β έχει ακτίνα 1 και εφάπτεται του θετικού ημιάξονα Χ και του κύκλου με κέντρο Α. Η ευθεία (ε) εφάπτεται και των δύο κύκλων. Η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα ΨΨ΄ ισούται:



Α. $3+6\sqrt{3}$ **Β.** $10+3\sqrt{2}$ **Γ.** $8\sqrt{3}$ **Δ.** $10+2\sqrt{3}$ **Ε.** $9+3\sqrt{3}$

Άσκηση 29. Για την συνάρτηση $\psi=f\left(\chi\right)$ ισχύει ότι για κάθε $\chi>0$,

$f\left(2\chi - \frac{1}{2\chi}\right) = \left(2\chi + \frac{1}{2\chi}\right)^2$, τότε το $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ισούται:

Α. $\frac{25}{4}$ **Β.** $\frac{9}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{4}$ **Δ.** 6 **Ε.** Κανένα από τα προηγούμενα

Άσκηση 30. Το ψηφίο των μονάδων του γινομένου $\left(5^{34}+1\right)\left(5^{35}+1\right)\left(5^{36}+1\right)$ ισούται με:

Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** 5 **Ε.** 6

Απαντήσεις Ερωτήσεων

Ερ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Β	Γ	Ε	Α	Δ	Γ	Β	Ε	Β	Γ	Α	Δ	Β	Γ	Α	Β	Δ	Α	Α	Α	Β	Α	Δ	Ε	Γ	Β	Ε	Ε	Α	Ε