ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
Δικταίου Άντρου 3
71201 Ηράκλειο Κρήτης
e-mail : newsfrommath@yahoo.gr
Ιστοσελίδα: www.mathher.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
BRANCH OF HERAKLION
3, Dikteou Androu Str
71201, Heraklion, Crete
e-mail : newsfrommath@yahoo.gr
website: www.mathher.gr

ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2012

Α΄ Γυμνασίου

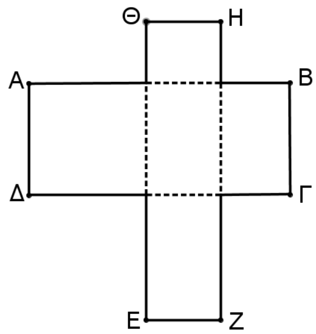
1. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις

$$A = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right) \text{ και } B = \frac{\left(3^2-2^3\right)^{2012}}{\left(3^2+1\right)^2\cdot 0{,}01+2^5:2^4}$$

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B.
(β) Να γράψετε τρία διαφορετικά μεταξύ τους κλάσματα, που να είναι μεταξύ των αριθμών A και B.

2. Αντικαθιστώντας κάθε έναν από τους α και β με το κατάλληλο ψηφίο από το 0 έως και το 9, να βρείτε όλους τους αριθμούς της μορφής 8726α2415β οι οποίοι διαιρούνται ακριβώς με το 15.

3. Ο σταυρός του διπλανού σχήματος είναι κατασκευασμένος από δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ με διαστάσεις ΑΒ=7, ΒΓ=3 και ΗΖ=8, ΕΖ=2 (όλες οι γωνίες είναι ορθές).
Να βρείτε:
α) την περίμετρο του σταυρού.
β) το εμβαδόν του σταυρού.



4. Ο Γιώργος, η Μαρία και ο Μανώλης έχουν στον κουμπαρά τους χρήματα ανάλογα με τους αριθμούς 5, 4 και 3 αντίστοιχα. Αν ο Γιώργος δώσει στη Μαρία 7€, τότε οι δυο τους θα έχουν τον ίδιο αριθμό χρημάτων. Πόσα χρήματα έχει αρχικά ο καθένας στον κουμπαρά του;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

20 Οκτωβρίου 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

$$A=2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=$$
$$=2\cdot\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)=$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=$$
$$=2\cdot\frac{1}{5}=$$
$$=\frac{2}{5}=$$
$$=\frac{24}{60}$$

$$B=\frac{\left(3^2-2^3\right)^{2012}}{\left(3^2+1\right)^2\cdot 0{,}01+2^5:2^4}=$$
$$=\frac{(9-8)^{2012}}{(9+1)^2\cdot 0{,}01+2}=$$
$$=\frac{1^{2012}}{10^2\cdot 0{,}01+2}=$$
$$=\frac{1}{100\cdot 0{,}01+2}=$$
$$=\frac{1}{1+2}=$$
$$=\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{20}{60}$$

Άρα

α) $B\langle A$ και

β) $B=\frac{20}{60}\langle\frac{21}{60}\langle\frac{22}{60}\langle\frac{23}{60}\langle\frac{24}{60}=A$

*<u>Παρατήρηση</u>: Ένας γρήγορος τρόπος να παρεμβάλουμε ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο άλλα, είναι να **προσθέτουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή**, δηλαδή:*

$\frac{1}{3}<\frac{1+2}{3+5}<\frac{2}{5}$, *δηλαδή* $\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}$ *και ομοίως* $\frac{1}{3}<\frac{4}{11}<\frac{3}{8}<\frac{5}{13}<\frac{2}{5}$

Βέβαια, στη συνέχεια, πρέπει να αποδείξουμε τις ανισώσεις κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα, η διαφορετικά να αποδείξουμε τη γενικότερη ανισότητα:

$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}<\frac{\gamma}{\delta}$, *όταν* $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}$

(που απαιτεί εξοικείωση με τις μεταβλητές και παραπέμπει σε ύλη μεγαλύτερης τάξης)

Μία πρακτική εξήγηση (όχι αυστηρή μαθηματική απόδειξη), είναι και η παρακάτω:
Ας υποθέσουμε ότι σε ένα αγώνα μπάσκετ, ένας παίκτης έχει 1 στις 3 πετυχημένες βολές στο πρώτο ημίχρονο και 2 στις 5 στο δεύτερο. Σε όλο τον αγώνα, έχει 3 στις 8.
Το συνολικό ποσοστό του δεν μπορεί να είναι καλύτερο και από τα δύο ημίχρονα, ούτε όμως και χειρότερο από τα δύο. Είναι κάτι ενδιάμεσο (όχι απαραίτητα ο λεγόμενος μέσος όρος).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Ένας αριθμός διαιρείται με το 15 αν και μόνο αν διαιρείται με το 3 και με το 5.

Όμως, ένας αριθμός διαιρείται με το 5 αν και μόνο αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5 οπότε β=0 ή β=5.

<u>Περίπτωση $1^{η}$</u>) Αν β=0 τότε ο αριθμός έχει τη μορφή 8726α24150 ο οποίος διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3, δηλαδή αν 8+7+2+6+α+2+4+1+5+0=35+α είναι πολλαπλάσιο του 3 όπου το α μπορεί να πάρει ακέραιες τιμές από 0 έως 9.
Έτσι για **α=1** είναι 35+α=35+1=36 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3,
για **α=4** είναι 35+α=35+4=34 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 και
για **α=7** είναι 35+α=35+7=42 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3.

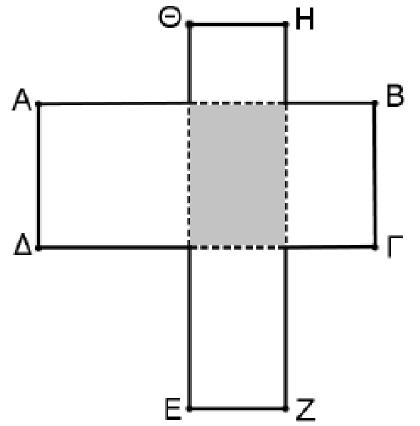
Άρα σε αυτή την περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:
8726124150, **8726424150** και **8726724150**

<u>Περίπτωση $2^{η}$</u>) Αν β=5 τότε ο αριθμός έχει τη μορφή 8726α24155 ο οποίος διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3, δηλαδή αν 8+7+2+6+α+2+4+1+5+5=40+α είναι πολλαπλάσιο του 3 όπου το α μπορεί να πάρει ακέραιες τιμές από 0 έως 9.
Έτσι για **α=2** είναι 40+α=40+2=42 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3,
για **α=5** είναι 40+α=40+5=45 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 και
για **α=8** είναι 40+α=40+8=48 το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άρα σε αυτή την περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί είναι:
8726224155, **8726524155** και **8726824155**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
α) Από το σχήμα εύκολα συμπεράνουμε ότι η περίμετρος του σταυρού είναι:

$$\text{Περίμετρος}=2\cdot AB+2\cdot HZ=2\cdot 7+2\cdot 8=14+16=30 \text{ μονάδες}$$



(*<u>Παρατήρηση</u>: Οι πλευρές ΑΔ, ΒΓ συμπληρώνουν τα διακεκομμένα μέρη των ΕΘ, ΖΗ, όπως και οι ΘΗ, ΕΖ συμπληρώνουν τα διακεκομμένα μέρη των ΑΒ, ΔΓ.*)

β) Επίσης από το σχήμα συμπεράνουμε ότι το εμβαδό του σταυρού είναι:

$$E=E_{(ΑΒΓΔ)}+E_{(ΕΖΗΘ)}-E_{(ΓΚΡΙ\_ΠΕΡΙΟΧΗΣ)}=$$
$$=7\cdot 3+8\cdot 2-2\cdot 3=$$
$$=21+16-6=$$
$$=31 \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

(*<u>Παρατήρηση</u>: Το εμβαδό της γκρι περιοχής το έχουμε μετρήσει δύο φορές, μία στο εμβαδό του ορθογώνιου ΑΒΓΔ και άλλη μία στο εμβαδό του ορθογώνιου ΕΖΗΘ και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το αφαιρέσαμε μία φορά*)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Αν ο Γιώργος δώσει 7€ στη Μαρία, θα έχουν τα ίδια χρήματα. Επομένως ο Γιώργος, έχει 14€ παραπάνω από τη Μαρία.

Επίσης, αφού η αναλογία χρημάτων του Γιώργου προς αυτά της Μαρίας είναι 5:4, ο Γιώργος έχει 5πλάσια χρήματα από όσο είναι η διαφορά του από την Μαρία. Δηλαδή, ο Γιώργος έχει $5 \cdot 14 = 70$€ και η Μαρία 70-14=56€ ευρώ.

Τέλος, ο Μανώλης έχει 56-14=42€, καθώς οι διαφορές Γιώργου-Μαρίας και Μαρίας-Μανώλη είναι ίσες, λόγω της αναλογίας 5:4:3.

2^{ος} τρόπος
Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος, η Μαρία και ο Μανώλης έχουν **γ**, **μ** και **σ** χρήματα, τα οποία είναι ανάλογα με τους αριθμούς 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

Οπότε θα είναι:
$\frac{\gamma}{5} = \frac{\mu}{4} = \frac{\sigma}{3} = \kappa$, όπου κ ο συντελεστής αναλογίας
δηλαδή
$\gamma=5\kappa$, $\mu=4\kappa$ και $\sigma=3\kappa$

Αν ο Γιώργος δώσει 7€ στη Μαρία τότε οι δυο τους θα έχουν ίσο αριθμό χρημάτων.
Αυτό όμως σημαίνει ότι,
$\gamma-7=\mu+7$
όπου αντικαθιστώντας το $\gamma=5\kappa$ και το $\mu=4\kappa$ έχουμε,
$5\kappa-7=4\kappa+7$
$5\kappa-4\kappa=7+7$
$\kappa=14$

Οπότε
$\gamma=5\kappa=5\cdot14=70$, $\mu=4\kappa=4\cdot14=56$ και $\sigma=3\kappa=3\cdot14=42$

Άρα ο Γιώργος έχει 70€, η Μαρία 56€ και ο Μανώλης 42€.

3^{ος} τρόπος
Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα αναλόγων ποσών,

Γιώργος	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Μαρία	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
Μανώλης	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα ικανοποιεί τις υποθέσεις του προβλήματος άρα αυτό είναι και τα ποσό των χρημάτων που έχει καθένα από τα παιδιά στον κουμπαρά του.

(*Παρατήρηση: Ο τρόπος αυτός δεν δουλεύει αν οι λύσεις είναι δεκαδικοί αριθμοί.)*