ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7} = \frac{9(n^2+7)-32}{n^2+7} = 9 - \frac{32}{n^2+7}.$$

Επειδή ο αριθμός Κ είναι ακέραιος, έπεται ότι ο n^2+7 είναι διαιρέτης του 32 και αφού είναι $n^2+7 \geq 8$, έπεται ότι:

$$n^2+7 \in \{8,16,32\} \Leftrightarrow n^2 \in \{1,9,25\} \Leftrightarrow n \in \{-1,1,-3,3,-5,5\}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να λύσει τη δεδομένη ισότητα ως προς n^2 και στη συνέχεια να προσδιορίσει τις κατάλληλες τιμές του Κ για τις οποίες ο n^2 προκύπτει μη αρνητικός ακέραιος.

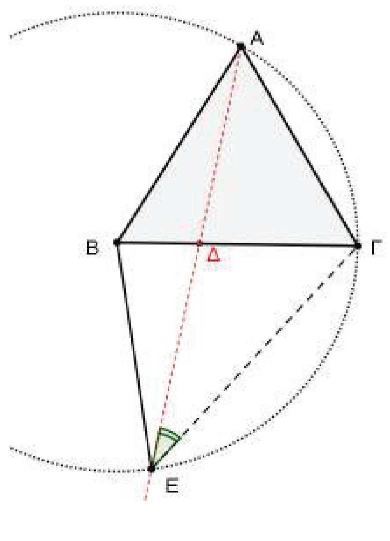
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος)

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA}=\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{BE}$, οπότε το σημείο Β είναι κέντρο κύκλου που περνάει από τα σημεία Α, Γ και Ε. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(\mathrm{B},\mathrm{BA})$ με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^\circ$. Άρα είναι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0.$$



$2^{ος}$ τρόπος

Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$ και $\mathrm{BA}=\mathrm{B}\Gamma$, οπότε θα είναι $\mathrm{B}\Gamma=\mathrm{BE}$, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Αν φέρουμε το ύψος του από την κορυφή Β, έστω BZ, $Z \in \Gamma E$, τότε η ΒΖ είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΓΕ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΒΖ με την ΑΕ. Τότε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΚΕ είναι ίσα, γιατί έχουν:

$B\Gamma = BE$, ΒΚ κοινή πλευρά και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{B}E$.

Άρα έχουμε:

$$B\hat{\Gamma}K = B\hat{E}K$$

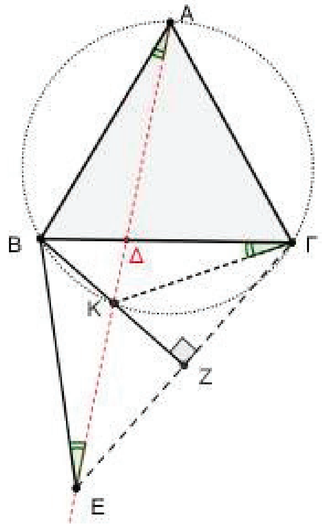
και αφού $B\hat{E}K = B\hat{A}K$ έπεται ότι $B\hat{\Gamma}K = B\hat{A}K$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΚΓ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$Z\hat{K}E = B\hat{K}A \text{ (ως κατά κορυφή)}$$

$B\hat{K}A = B\hat{\Gamma}A = 60^\circ$ (από το εγγράψιμο ΑΒΚΓ).

Άρα είναι

$$A\hat{E}\Gamma = K\hat{E}Z = 90^\circ - E\hat{K}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^0.$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \text{ και } B = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A < B$, **(β)** $A < \frac{1}{5990}$.

Λύση

(α) Σε κάθε κλασματικό παράγοντα του Α της μορφής $\frac{2\nu-1}{2\nu+2}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 299$, αντιστοιχεί ένας κλασματικός παράγοντας του Β της μορφής $\frac{2\nu}{2\nu+3}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 299$.

Επειδή ισχύει:

$$\frac{2\nu-1}{2\nu+2} < \frac{2\nu}{2\nu+3} \Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu - 3 < 4\nu^2 + 4\nu \Leftrightarrow -3 < 0,$$

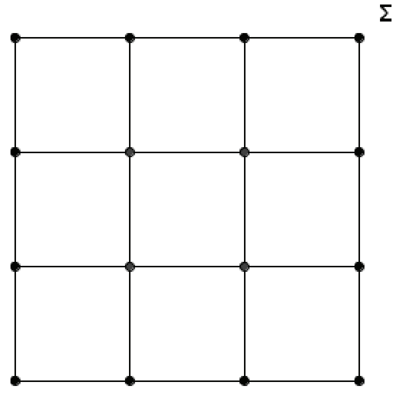
για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, άρα και για $\nu = 1, 2, \ldots, 299$, με πολλαπλασιασμό των παραπάνω 299 ανισοτήτων με θετικούς όρους κατά μέλη, προκύπτει η ανισότητα $A < B$.

(β) Επειδή είναι $A > 0$, από την ανισότητα $A < B$ με πολλαπλασιασμό των δύο μελών της επί Α, λαμβάνουμε:

$$A^2 < A \cdot B = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{599\cdot 600\cdot 601} < \frac{1}{100\cdot 599^2} = \frac{1}{5990^2} \Rightarrow A < \frac{1}{5990}.$$

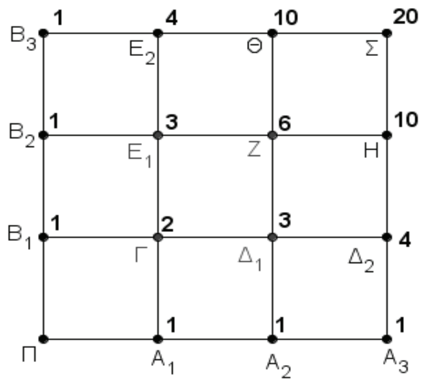
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



Λύση

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει κάποιος μαθητής όλες τις διασταυρώσεις μέχρι να φτάσει στο σχολείο.



Προφανώς στις διασταυρώσεις A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2, B_3, μπορεί κάποιος μαθητής να μετακινηθεί με ένα μόνο τρόπο, διότι μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά ή προς τα άνω.

Στις υπόλοιπες διασταυρώσεις, μπορεί να μετακινηθεί με το άθροισμα των τρόπων που μπορεί να μετακινηθεί προς τις πλησιέστερες διασταυρώσεις που βρίσκονται αριστερά και προς τα κάτω.

Έτσι όλες οι δυνατές διαδρομές από τις οποίες μπορεί να φτάσει κάποιος στο σχολείο, είναι συνολικά 20. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, δύο τουλάχιστον μαθητές θα ακολουθήσουν οπωσδήποτε την ίδια διαδρομή, εφόσον ο αριθμός των μαθητών είναι $k \geq 21$. Άρα η ελάχιστη τιμή του k είναι 21.