ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y. \qquad (1)$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι για $y < 0$ η δεδομένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει ακέραιες λύσεις. Ομοίως για $y = 0$ η (1) δεν έχει ακέραια λύση

Για $y \in \mathbb{Z},\ y \geq 1,$ η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 6x^2 + \left(1 - 7 \cdot 2^y\right) = 0 \qquad (2)$$

η οποία για να έχει ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσα της αντίστοιχης επιλύουσας της (2) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, δηλαδή πρέπει

$$\Delta = 36 - 4\left(1 - 7 \cdot 2^y\right) = 32 + 4 \cdot 7 \cdot 2^y = 4 \cdot \left(8 + 7 \cdot 2^y\right)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Επειδή είναι $4 = 2^2$, για να είναι ο αριθμός Δ τέλειο τετράγωνο ακέραιου πρέπει και αρκεί ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 8 + 7 \cdot 2^y,\ y \geq 1$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Όμως ο αριθμός Α είναι άρτιος, οπότε, αν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε θα ισχύει ότι

$$\mathrm{A} = 8 + 7 \cdot 2^y = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 + 7 \cdot 2^{y-2} = \kappa^2, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa > 0 \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) για $y = 1$ είναι αδύνατη, ενώ για $y = 2$ δίνει $\kappa = 3$, οπότε είναι $\mathrm{A} = 36$ και $\Delta = 4 \cdot 36 = 12^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 12}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \text{ ή } x^2 = -3 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Για $y = 3$, η εξίσωση (3) δίνει $\kappa = 4$, οπότε είναι $\mathrm{A} = 64$ και $\Delta = 4 \cdot 64 = 16^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2 = \frac{6 \pm 16}{2} \Leftrightarrow x^2 = 11 \text{ ή } x^2 = -5,$$

από τις οποίες καμία δεν είναι αποδεκτή.

Για $y \geq 4$, αφού ο ακέραιος $B = 2 + 7\cdot 2^{y-2}$ είναι άρτιος, η εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2 + 7\cdot 2^{y-2} = (2\lambda)^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 + 7\cdot 2^{y-3} = 2\lambda^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Άρα οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι: $(x, y) = (\pm 3, 2)$.

2ος τρόπος

Όπως και στον πρώτο τρόπο παρατηρούμε ότι για $y \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη στους ακέραιους.

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\left(x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 7\cdot 2^y, \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 + 2x - 1 = 2^a,\ a \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 - 2x - 1 = 7\cdot 2^b, b \in \mathbb{Z}_+ \\ a + b = y \end{array}\right\}(\Sigma_1) \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 + 2x - 1 = 7\cdot 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}_+ \\ \kappa + \lambda = y \end{array}\right\}(\Sigma_2)$$

Λύση (Σ_1)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^a$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^a\right) = 4\left(2 + 2^a\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $K = 2 + 2^a$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $a = 0$ ή $a = 2$ ο αριθμός K δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $a = 1$ είναι $K = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = -3$ ή $x = 1$.

Για $x = -3$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7\cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $14 = 7\cdot 2^b$ η οποία έχει τη λύση $b = 1$, οπότε προκύπτει $y = a + b = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (-3, 2)$

Για $x = 1$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7\cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $-2 = 7\cdot 2^b$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a \geq 3$, αφού ο αριθμός $K = 2 + 2^a$ είναι άρτιος, πρέπει

$$K = 2 + 2^a = (2m)^2, m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1 + 2^{a-2} = 2m^2, m \in \mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Λύση (Σ_2)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^\kappa\right) = 4\left(2 + 2^\kappa\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\Lambda = 2 + 2^\kappa$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $\kappa = 0$ ή $\kappa = 2$ ο αριθμός Λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $\kappa = 1$ είναι $\Lambda = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = 3$ ή $x = -1$.

Για $x = 3$ η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 7\cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $14 = 7\cdot 2^\lambda$ η οποία έχει τη λύση $\lambda = 1$, οπότε προκύπτει $y = \kappa + \lambda = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (3, 2)$

Για $x=-1$ η εξίσωση $x^2+2x-1=7\cdot 2^{\lambda}$ δίνει την εξίσωση $-2=7\cdot 2^{\lambda}$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a\geq 3$, αφού ο αριθμός $\Lambda=2+2^{\lambda}$ είναι άρτιος πρέπει

$$\Lambda=2+2^{\kappa}=\left(2m\right)^2,m\in\mathbb{Z}_+\Leftrightarrow 1+2^{\kappa-2}=2m^2,m\in\mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}. \qquad (1)$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y δίνεται ότι $x+y=2\alpha$, $\alpha>0$, μπορούμε να θέσουμε:

$$x=\alpha+t,\ y=\alpha-t,\ -\alpha\leq t\leq\alpha.$$

Με αντικατάσταση των x,y στην (1), προκύπτει ότι, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\left(\alpha+t\right)^3\left(\alpha-t\right)^3\left[\left(\alpha+t\right)^2+\left(\alpha-t\right)^2\right]^2\leq 4\alpha^{10}$$

$$\Leftrightarrow\qquad 4\left(\alpha^2-t^2\right)^3\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}$$

$$\Leftrightarrow\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^2-t^2\right)^2\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq\alpha^{10}$$

$$\Leftrightarrow\qquad\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^{10},$$

η οποία αληθεύει, αφού λόγω της υπόθεσης $-\alpha\leq t\leq\alpha$ για τη νέα μεταβλητή t, έχουμε

$$\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^2\cdot\alpha^8=\alpha^{10}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $t=0$, δηλαδή όταν $x=y=\alpha$.

Παρατήρηση

Για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\alpha^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow x^3y^3\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^6=\alpha^6 \qquad (2)$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=\alpha$.

Επίσης, για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$2\alpha^2\leq x^2+y^2\leq 4\alpha^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow 4\alpha^4\leq\left(x^2+y^2\right)^2\leq 16\alpha^4 \qquad (4)$$

όπου η ισότητα αριστερά ισχύει για $x=y=\alpha$, ενώ η ισότητα δεξιά ισχύει για $\left(x,y\right)=\left(2\alpha,0\right)$ ή $\left(0,2\alpha\right)$.

Όμως από τις (2) και (4) δεν μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα. Επομένως πρέπει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2=xy\left[xy\left(x^2+y^2\right)\right]^2=xyg(x,y),$$

υπό τη συνθήκη $x+y=2\alpha$. Όμως η συνάρτηση $g(x,y)=x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2$ έχει μέγιστη τιμή, όταν η συνάρτηση $h(x,y)=xy\left(x^2+y^2\right)$ έχει μέγιστη τιμή, δηλαδή όταν η συνάρτηση

$$\varphi(x)=h(x,2\alpha-x)=x(2\alpha-x)\left(2x^2-4\alpha x+4\alpha^2\right),0\le x\le 2\alpha$$

έχει μέγιστη τιμή $\varphi(\alpha)=2\alpha^4$, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση παραγώγων. Από αυτό και την (1) μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

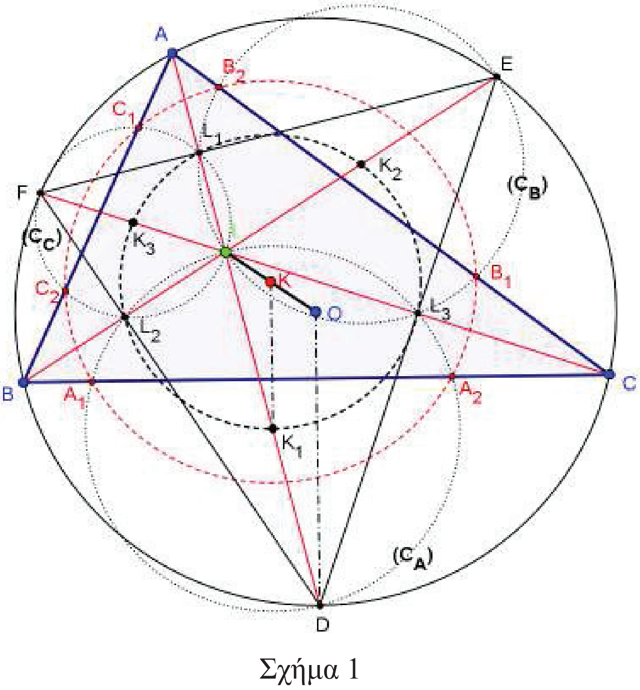
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI,BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D,E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID,IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC,AC και AB στα σημεία A_1,A_2, B_1,B_2 και C_1,C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω (C_A) ο κύκλος με κέντρο το K_1 και διάμετρο ID (K_1 το μέσο του ID), (C_B) ο κύκλος με κέντρο το K_2 και διάμετρο IE (K_2 το μέσο του IE) και (C_C) ο κύκλος με κέντρο το K_3 και διάμετρο IF (K_3 μέσο του IF).



Σχήμα 1

Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$DI=DB=DC,\ EI=EA=EC \text{ και } FI=FA=FB \qquad (1)$$

Οι κύκλοι (C_A) και (C_C) τέμνονται στα σημεία I και L_2.

Οι γωνίες $D\hat{L}_2I$ και $F\hat{L}_2I$ είναι ορθές διότι βαίνουν στις διαμέτρους DI και FI των κύκλων (C_A) και (C_C) οπότε τα σημεία D, L_2, F είναι συνευθειακά.

Σε συνδυασμό με τις ισότητες (1) καταλήγουμε ότι η DF είναι μεσοκάθετη της IB. Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι η DE είναι μεσοκάθετη της IC και η EF είναι μεσοκάθετη της IA.

Άρα το σημείο I είναι ορθόκεντρο του τριγώνου DEF του οποίου το περίκεντρο ταυτίζεται με το περίκεντρο O του τριγώνου ABC.

Τα σημεία K_1, K_2, K_3 και L_1, L_2, L_3 ανήκουν στο κύκλο του EULER του τριγώνου DEF που έχει κέντρο το μέσο K του ευθύγραμμου τμήματος IO.

Στο τρίγωνο IOD, έχουμε: K_1 το μέσο του ID και K το μέσο του IO.

Άρα $KK_1 \parallel OD$ και επειδή $OD \perp BC$ συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη του A_1A_2. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη των B_1B_2 και C_1C_2.

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

Θεωρώντας τη δύναμη του σημείου A ως προς τους κύκλους (C_B) και (C_C) έχουμε:

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2 = AI \cdot AL_1.$$

Άρα τα σημεία B_1, B_2, C_1, C_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

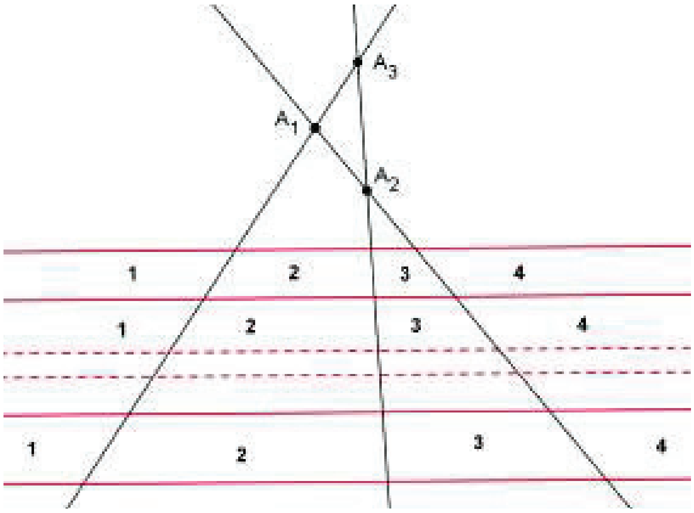
Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "*καλό*" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "*καλών*" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

Λύση

Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k-1$ διαδοχικές παράλληλες "λωρίδες" στο επίπεδο. Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ σημεία.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

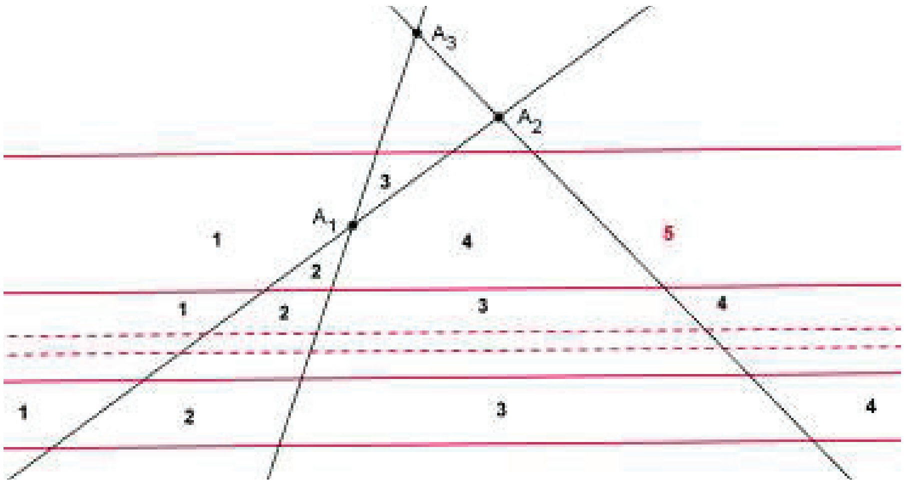
1η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων "λωρίδων".



Σχήμα 2

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε "λωρίδα" $n+1$ "καλά" χωρία. Άρα ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά "καλά" χωρία. Στο σχήμα 2 βλέπουμε τα "καλά" χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα των παράλληλων ευθειών, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επί πλέον "καλό" χωρίο (σχήμα 3).

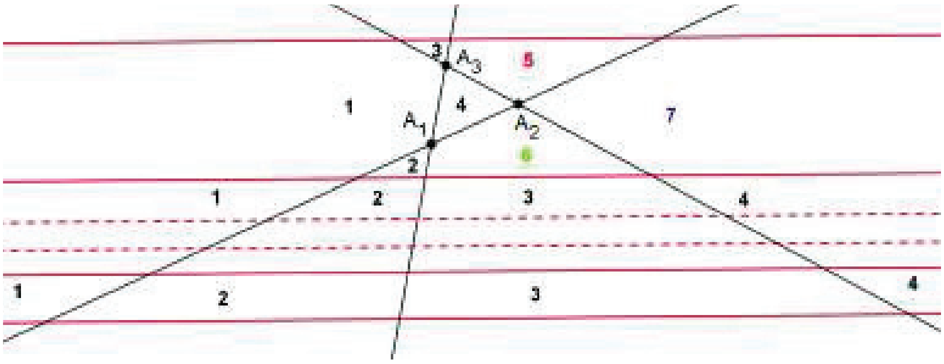


Σχήμα 3

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός "καλών" χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των "καλών" χωρίων.

$2^{η}$ Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις "λωρίδες", θα προστίθεται κάθε φορά και ένα "καλό" χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ "καλά" χωρία.



Σχήμα 4

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των "καλών" χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ (k-1)(n+1)+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}. \Leftrightarrow k=17, n=10.$$

Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

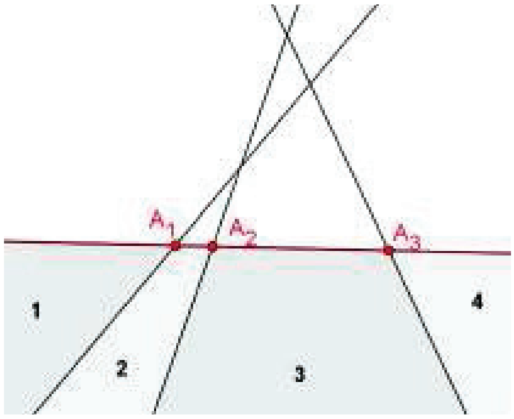
Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπ΄ όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1)=2$. Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1)=p(m)+r$, όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που "δημιουργούνται" με τη χάραξη της $(m+1)^{ης}$ ευθείας.



Σχήμα 5

Με τη χάραξη λοιπόν της $(m+1)^{ης}$ ευθείας "δημιουργούνται" τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα. Αν δηλαδή η $(m+1)$-ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση:

$$p(m)=p(m-1)+m \text{ και } p(1)=2.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

$$p(m)=\frac{m^2+m+2}{2}.$$

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που "δημιουργούνται", είναι: $\frac{n^2+n+2}{2}+k(n+1)$. Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.