ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

$28^{η}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

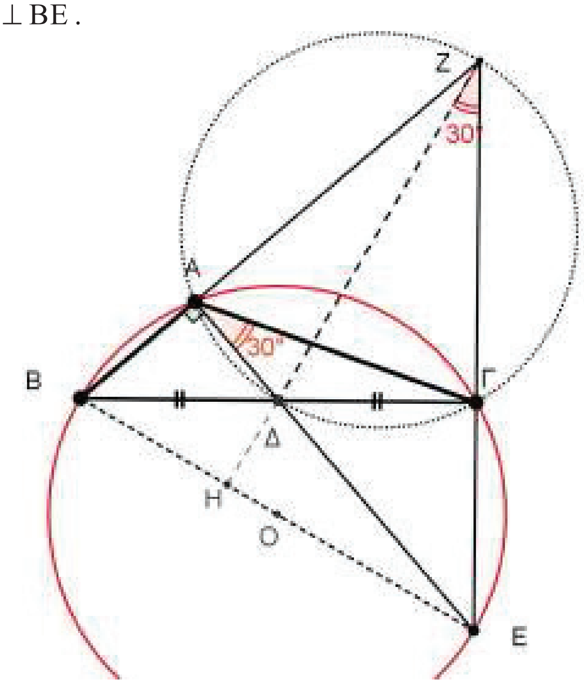
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $B\hat{A}\Gamma = 120^\circ$. Αν Δ είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, δίνεται ότι η ευθεία $A\Delta$ είναι κάθετη προς την πλευρά AB και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο σημείο E. Οι ευθείες BA και $E\Gamma$ τέμνονται στο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) $Z\Delta \perp BE$, **(β)** $Z\Delta = B\Gamma$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $B\hat{A}E = 90^\circ$ η BE είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως θα είναι και $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο ΖΒΕ τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΒΓ είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο Δ.

Επομένως η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΖΒΕ, δηλαδή είναι $Z\Delta \perp BE$.



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι: $Z\hat{B}H = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$Z\hat{B}H = 180^\circ - \left(H\hat{B}Z + B\hat{Z}H\right) \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$H\hat{B}Z = E\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = E\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{B}A = 120^\circ - 90^\circ + \Gamma\hat{B}A = 30^\circ + \hat{B}. \qquad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΓΖ (γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \hat{\Gamma} \qquad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = 180^\circ - \left(30^\circ + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(180^\circ - 120^\circ\right) = 90^\circ .$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα θα έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\mathrm{Z}$ η υποτείνουσα ΖΔ θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΔΓ, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{B}\Gamma$, αφού Δ μέσο της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha - \delta) + 100(\beta - \gamma) + 10(\gamma - \beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha - \delta) + 90(\beta - \gamma) \\ &= 9\left(111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma)\right). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma).$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον $x > y$, θα ισχύει $\alpha > \delta$.

Η παράσταση Α γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν μέγιστοι και επί πλέον $\alpha - \delta > \beta - \gamma$. Η διαφορά $\alpha - \delta$ γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 9$ και $\delta = 1$. Η διαφορά $\beta - \gamma$ γίνεται μέγιστη όταν $\beta = 8$ και $\gamma = 2$.

Άρα $x = 9821$ και $y = 1289$ είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά $x - y = 9821 - 1289 = 8532$.

Η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $\alpha - \delta$ είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ) είναι:

$$(9,8), (8,7), (7,6)\ (6,5)\ (5,4)\ (4,3)\ (3,2) \text{ και } (2,1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ), η τιμή της παράστασης A γίνεται:

$$\mathrm{A} = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς $\beta - \gamma$ είναι το -8 που δημιουργείται για $\beta = 1$ και $\gamma = 9$.

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη $(9,8)$ και $(2,1)$ (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών x, y καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$.

Λύση

(α) Έστω $3\nu+1=7\kappa$, όπου ν,κ ακέραιοι. Ο ακέραιος ν έχει τη μορφή $\nu=7\rho+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ και ρ ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\upsilon)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\upsilon+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\upsilon+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το υ είναι το 2. Έτσι έχουμε $\nu=7\rho+2$, όπου ρ ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m=(7\rho+2)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(7\rho)^{m-i}2^i=\pi o\lambda.7+2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^m με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι $m=3\sigma+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$, τότε λαμβάνουμε:

$$2^m=2^{3\sigma+\upsilon}=8^\sigma\cdot 2^\upsilon=(7+1)^\sigma\cdot 2^\upsilon=(\pi o\lambda.7+1)\cdot 2^\upsilon=\pi o\lambda.7+2^\upsilon,$$

όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$. Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m>1$ είναι τα $2^0=1$, $2^1=2$ και $2^2=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}. \qquad (1)$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{x}\,, \qquad (2)$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4}\geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{4}}=\sqrt{y}\,, \qquad (3)$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{4}\geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{4}}=\sqrt{z}\ . \qquad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=\frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^3}\left(\frac{z^2}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^7}z^8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z^7=4^7\Leftrightarrow x=y=z=4.$$