ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι θετικοί ακέραιοι $p,\ q$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q\,,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p,q).

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$q(q-1)=p\left[\left(n^2+1\right)p-1\right]. \tag{1}$$

Επειδή είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=1$, από την (1) έπεται ότι $p\,|\,q-1,\ q\,|\left(n^2+1\right)p-1$ και

$$\frac{q-1}{p}=\frac{\left(n^2+1\right)p-1}{q}=k, \tag{2}$$

όπου k θετικός ακέραιος. Από τις εξισώσεις (2) λαμβάνουμε

$$q=kp+1 \text{ και } p=\frac{k+1}{n^2+1-k^2}. \tag{3}$$

Επειδή ο p είναι θετικός ακέραιος, από την (3) έπεται ότι:

$$0<n^2+1-k^2\le k+1\Rightarrow k^2<n^2+1\le k^2+k+1$$

$$\Rightarrow k^2-1<n^2\le k^2+k\Rightarrow k^2\le n^2\le k^2+k<(k+1)^2,$$

οπότε προκύπτει ότι $k=n$. Έτσι από τις σχέσεις (3) λαμβάνουμε:

$$p=\frac{n+1}{n^2+1-n^2}=n+1 \text{ και } q=n(n+1)+1=n^2+n+1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ζευγάρι $(p,q)=\left(n+1,\,n^2+n+1\right)$ επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση και ότι ισχύει: ΜΚΔ$\{p,q\}=1$. Πράγματι, αν είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=d$, τότε $d\,|\,(q-np)=1$, οπότε θα είναι $d=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P\left(x^2\right)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους έχει μεταξύ των ριζών του τις ρίζες πέμπτης τάξεως της μονάδας: $1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4$, όπου $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\omega^5=1$ και $\omega^6=\omega,\ \omega^8=\omega^3$.

Από την (1) λαμβάνουμε

$$P(\omega)=P(\omega^2),P(\omega^2)=P(\omega^4),P(\omega^3)=P(\omega^6)=P(\omega),P(\omega^4)=P(\omega^8)=P(\omega^3),$$

οπότε θα έχουμε

$$P(\omega)=P(\omega^2)=P(\omega^3)=P(\omega^4).$$

Αν b είναι η κοινή τιμή των $P(\omega),P(\omega^2),P(\omega^3)$ και $P(\omega^4)$, τότε το πολυώνυμο $P(x)-b$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4$, οπότε θα ισχύει:

$$P(x)-b=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)R(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x)=(x^4+x^3+x^2+x+1)R(x)+b.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πολυώνυμο $R(x)$ και επίσης πρέπει $b\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έπεται ότι το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν είναι $R(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται ο βαθμός του, τότε από την (1) προκύπτει ότι $(x^5-1)Q(x)=0$, από την οποία, δεδομένου ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, έπεται ότι $Q(x)=0$, που είναι μη αποδεκτό. Επομένως το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερό πολυώνυμο, έστω $R(x)=a\neq 0$. Τότε θα έχουμε

$$P(x)=a(x^4+x^3+x^2+x+1)+b=a(x^4+x^3+x^2+x)+c,$$

όπου $a\in\mathbb{R}^*,\ c=a+b\in\mathbb{R}$.

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a(x^8+x^6+x^4+x^2)-a(x^4+x^3+x^2+x)=(x^5-1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a(x^8-x^3+x^6-x)=(x^5-1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a(x^3+x)(x^5-1)=(x^5-1)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (x^5-1)\left[a(x^3+x)-Q(x)\right]=0.$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων έπεται ότι: $Q(x)=a(x^3+x),\ a\in\mathbb{R}^*$.

2ος τρόπος

Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου του δευτέρου μέλους της (1) είναι 5, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους είναι άρτιος, οπότε θα έχουμε

$$\min\deg Q(x)=1 \text{ και } \min\deg P(x)=3.$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\ a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},\ a_3\neq 0,$ τότε από τη δεδομένη ισότητα πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,P(x^2)-P(x)=a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,a_3(x^6-x^3)+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,a_3\left[x(x^5-1)+(x-x^3)\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,a_3\left[x(x^5-1)\right]+a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0$, οπότε λαμβάνουμε $a_2=a_3=0,\ a_1-a_2=0,\ a_1-a_3=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$, άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύει η δεδομένη ισότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, με $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}, a_4\in\mathbb{R}^*$. Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,P(x^2)-P(x)=a_4x^8+a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,a_4\left[(x^5-1)x^3+x^3\right]+a_3\left[(x^5-1)x+x\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\,\big|\,(x^5-1)(a_4x^3+a_3x)+(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbb{R}^*,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_4(x^4+x^3+x^2+x)+a_0,\ a_4\in\mathbb{R}^*, a_0\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

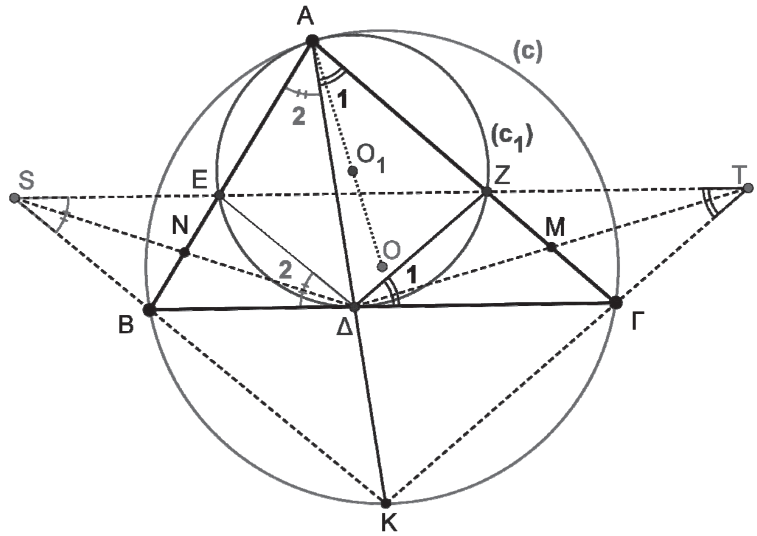
$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)(a_4x^3+a_4x)=(x^5-1)Q(x)\Rightarrow Q(x)=a_4(x^3+x),\ a_4\in\mathbb{R}^*.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\text{O},R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\text{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\text{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της ΤS.

Λύση

Εφόσον το κέντρο του κύκλου c_1 βρίσκεται επάνω στην ΟΑ, οι κύκλοι c και c_1 θα εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Δηλαδή οι κύκλοι c και c_1 είναι ομοιόθετοι στη ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Α και λόγο λ (λ είναι ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων).



Σχήμα 1

Αν λοιπόν κάποια ευθεία περνάει από το σημείο Α και τέμνει τους κύκλους c και c_1 στα σημεία Θ και Θ_1 αντίστοιχα, τότε $A\Theta = \lambda A\Theta_1$.

Με βάση τις προηγούμενες σκέψεις έχουμε:

Η ΒΓ είναι ομοιόθετη της ΕΖ, οπότε $B\Gamma // EZ$. Η ΚΓ είναι ομοιόθετη της ΔΖ, οπότε $K\Gamma // \Delta Z$. Έστω Τ το σημείο τομής των ΕΖ και ΚΓ. Τότε το ΔΖΤΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα και η ΔΜ θα περνάει από το σημείο Τ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το ΔESB είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το σημείο S.

Εφόσον το Ο είναι το ομοιόθετο του O_1 και Κ το ομοιόθετο του Δ, συμπεραίνουμε ότι: $O_1\Delta // OK$ και επειδή $OK \perp B\Gamma$ (διότι Κ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ), συμπεραίνουμε ότι $O_1\Delta \perp B\Gamma$.

Άρα η ΒΓ εφάπτεται του κύκλου $c_1(O_1, R_1)$ στο σημείο Δ.

Εφόσον Δ είναι το σημείο επαφής έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}.$$

(οι γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη)

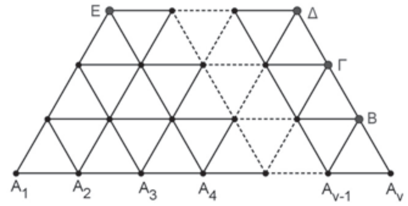
Σε συνδυασμό τώρα με τα παραλληλόγραμμα ΔESB και ΔΖΤΓ, έχουμε:

$$\hat{S} = \hat{T} = \frac{\hat{A}}{2}.$$

Άρα το τετράπλευρο ΒΓΤS είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS (διότι είναι μεσοκάθετη της βάσης του ΒΓ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1E έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του A_1A_ν έχει μήκος $\nu - 1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).

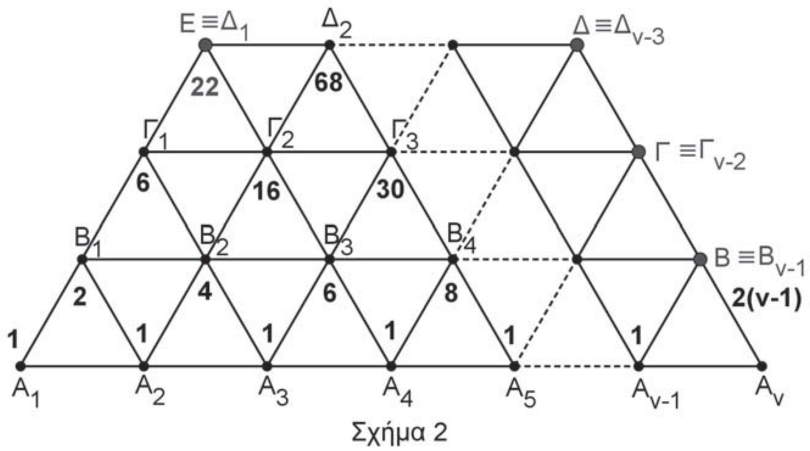


Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}$, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Λύση

Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\nu$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{\nu-1} \equiv \mathrm{B}$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{\nu-2} \equiv \Gamma$. Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{E} \equiv \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{\nu-3} \equiv \Delta$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα). Για παράδειγμα, με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.



Σχήμα 2

Προφανώς $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \cdots = \alpha_\nu = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + a_2 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \beta_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 2a_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ &= \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_4),\end{aligned}$$

και γενικά λαμβάνουμε

$$\beta_k = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{k+1}) - (\alpha_1 + \alpha_{k+1}) = 2(k+1) - 2 = 2k, \ ,$$

για $k = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 1)$.

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\beta = \beta_{\nu-1} = 2(\nu - 1)}.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_{i+1}) - (\beta_1 + \beta_{i+1}) = \\ &= 2(2 + 4 + \cdots + 2(i+1)) - (2 + 2i + 2) = \\ &= 4(1 + 2 + \cdots + (i+1)) - (4 + 2i) = \\ &= 2(i+1)(i+2) - 2(i+2) = \\ &= 2i(i+2), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 2).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\gamma = \gamma_{\nu-2} = 2\nu(\nu - 2)}.$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_{m+1}) - (\gamma_1 + \gamma_{m+1}) = \\ &= 4\underbrace{\big(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + (m+1)(m+3)\big)}_{S} - 2\big(1\cdot 3 + (m+1)(m+3)\big) = \\ &= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6} - 2\big(1\cdot 3 + (m+1)(m+3)\big) = \ldots\ldots.. \\ &= \frac{2}{3}m(2m^2 + 12m + 19), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, (\nu - 3)..\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\delta = \delta_{\nu-3} = \frac{2}{3}(\nu - 3)(2\nu^2 + 1)}.$$

Απ' ευθείας μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: $\varepsilon = 22$.

<u>Υπολογισμός του αθροίσματος</u>: $S = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + (m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2) = x^2 + 2x$ για $x = 1, x = 2 \ldots, x = m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot 3 &= 1^2 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 4 &= 2^2 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 5 &= 3^2 + 2\cdot 3 \\ &\vdots \\ m(m+2) &= m^2 + 2m \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + 2\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.