ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ) τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

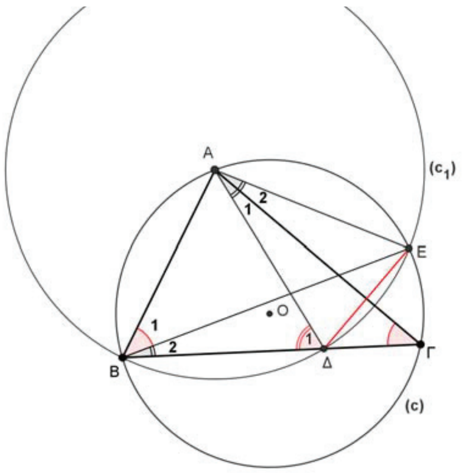
Λύση (1ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (σχήμα 1) και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{E}}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή έχουμε

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}. \quad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ που είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ και βάνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\mathrm{E}}$, ενώ η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$. Επομένως έχουμε

$$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2}{2}. \quad (2)$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}, \qquad (3)$$

από την οποία προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

2^{ος} τρόπος

Οι χορδές ΑΒ και ΑΕ του κύκλου *(c)* είναι ίσες μεταξύ τους, ως ακτίνες του κύκλου (c_1), οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = A\hat{E}B. \qquad (3)$$

Όμως οι γωνίες $A\hat{E}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή

$$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}. \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = \hat{\Gamma} \qquad (5)$$

και επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (6)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}B = \hat{B}$ και επειδή η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΔΓ, συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2. \qquad (8)$$

Επιπλέον, οι γωνίες $\hat{B}_2$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E = \hat{B}_2. \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) λαμβάνουμε την ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left||x-4| - 2x + 8\right| = ax + 4.$$

Λύση

Με σκοπό την απαλλαγή από την απόλυτη τιμή του $x-4$, θεωρούμε τις περιπτώσεις:

Ι. $x \geq 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = x-4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|x-4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |x-4| = ax+4$$

$$\Leftrightarrow x-4 = ax+4 \Leftrightarrow (1-a)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a=1$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.

- Για $a \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{8}{1-a}$, μόνον όταν

$$\frac{8}{1-a} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2}{1-a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1+a}{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) \leq 0, a \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 1.$$

Για $a < -1$ ή $a \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

ΙΙ. $x < 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = -x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|-x+4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-3(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |3(x-4)| = ax+4$$

$$\Leftrightarrow -3x+12 = ax+4 \Leftrightarrow (a+3)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = -3$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.
- Για $a \neq -3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \frac{8}{a+3}$, μόνον όταν

$$\frac{8}{a+3} < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{a+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-a-1}{a+3} < 0$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(a+1) > 0,\ a \neq -3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ ή } a > -1.$$

Για $-3 < a \leq -1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μικρότερη του 4.

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

- Για $a < -3$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{a+3}$.
- Για $-3 \leq a < -1$, η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Για $a = -1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{1-a}$.
- Για $-1 < a < 1$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = \frac{8}{1-a}$ και $x = \frac{8}{a+3}$.
- Για $a \geq 1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{8}{a+3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{ΕΚΠ}\{m,n\} + \text{ΜΚΔ}\{m,n\} = m+n. \qquad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m,n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

Λύση

(α) Έστω ότι $\text{ΜΚΔ}\{m,n\} = d$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a,b τέτοιοι ώστε:

$$m = ad,\ n = bd \text{ και } \text{ΜΚΔ}\{a,b\} = 1.$$

Τότε θα ισχύει ότι $\text{ΕΚΠ}\{m,n\} = \frac{mn}{d} = \frac{adbd}{d} = abd$ και η εξίσωση (*) γίνεται:

$$abd + d = ad + bd \Leftrightarrow d(ab+1-a-b) = 0,$$

από την οποία, αφού $d \geq 1$, προκύπτει ότι:

$$ab+1-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ή } b=1.$$

- Αν είναι $a=1$, τότε $m=d$ και $n=bd \geq d=m$, άτοπο.
- Αν είναι $b=1$, τότε $n=d$ και $m=ad$, οπότε προκύπτει ότι $n|m$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε $n=d$ και $m=ad$, με $a>1$, αφού $m>n$, οπότε

$$m-n=10 \Leftrightarrow ad-d=10 \Leftrightarrow (a-1)d=10.$$

Επειδή οι αριθμοί $a-1, d$ είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$(a-1,d) \in \{(1,10),(2,5),(5,2),(10,1)\} \Leftrightarrow (a,d) \in \{(2,10),(3,5),(6,2),(11,1)\},$$

οπότε λαμβάνουμε τα ζευγάρια

$$(m,n)=(20,10) \text{ ή } (15,5) \text{ ή } (12,2) \text{ ή } (11,1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

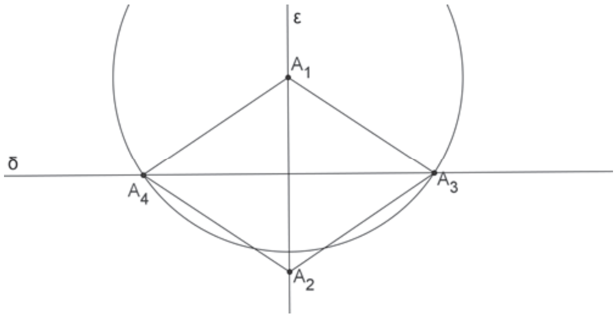
Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι από τέσσερα σημεία που ανά τρία είναι μη συνευθειακά, ορίζονται συνολικά $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$ διαφορετικά τρίγωνα. Επομένως, ο μέγιστος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων που μπορεί να οριστούν με κορυφές τρία από τα από τα τέσσερα σημεία είναι 4. Στη συνέχεια, για τις περιπτώσεις (α) και (β), θα προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, έτσι ώστε να ορίζονται τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα από τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4. Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις σε σχέση με τη βάση και τις ίσες πλευρές. Στη πρώτη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι βάση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι μία από τις ίσες πλευρές. Έχοντας στο νου μας αυτές τις δύο δυνατότητες, προσπαθούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4.

(α) *Τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε.*

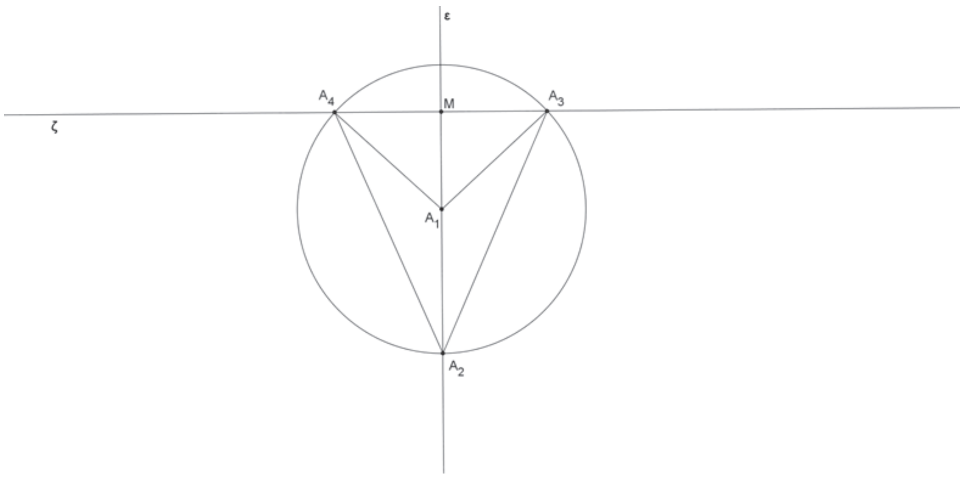
Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Η πρώτη περίπτωση είναι τα σημεία A_3 και A_4 να ανήκουν στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε. Τότε ορίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_2A_4$. Αν επιπλέον το σημείο A_4 είναι η τομή της μεσοκάθετης δ με τον κύκλο $c\left(A_1, A_1A_3\right)$, τότε θα είναι $A_1A_3 = A_1A_4$, αλλά και $A_2A_3 = A_2A_4$ (λόγω συμμετρίας), οπότε και τα τρίγωνα $A_1A_3A_4$ και $A_2A_3A_4$ είναι ισοσκελή, σχήμα 2.



Σχήμα 2

- Η δεύτερη περίπτωση είναι γενίκευση της πρώτης. Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, πάνω σε τυχούσα ευθεία ζ κάθετη προς την ευθεία ε, όχι στα σημεία A_1, A_2, αλλά και πάνω στον κύκλο $c\left(A_1, A_1A_2\right)$, ώστε να εξασφαλίζονται οι ισότητες $A_1A_2 = A_1A_3 = A_1A_4$ και $A_1A_4 = A_1A_3$, $A_2A_4 = A_2A_3$, αφού η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη της χορδής A_3A_4, σχήμα 3.



Σχήμα 3

- Στη περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η A_1A_2 είναι βάση στο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ και μία από τις ίσες πλευρές στο τρίγωνο $A_1A_2A_4$, σχήμα 4. Τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_4A_3$, αλλά και τα $A_1A_2A_4$ και $A_2A_4A_3$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, $A_4A_1 = A_1A_2 = A_3A_2$ και $A_4A_3 = A_4A_2 = A_1A_2$. Άρα έχουμε και τις ισότητες των γωνιών:

$$\theta = \omega \text{ και } \varphi = x. \qquad (1)$$

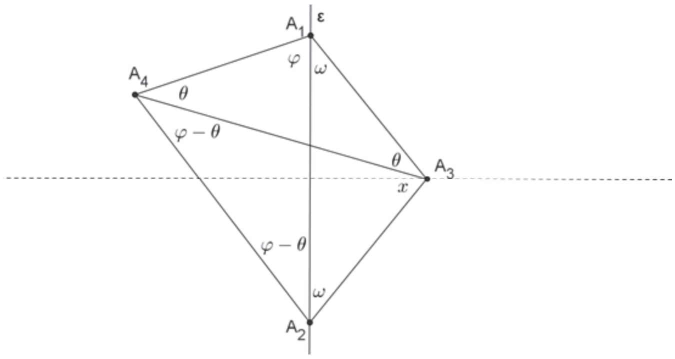
Από το τρίγωνο $A_1A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα:

$$\varphi+\omega+2\theta=180^0 \text{ ή } \varphi+3\theta=180^0, \qquad (2)$$

ενώ από το τρίγωνο $A_2A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα

$$2(\varphi-\theta)+x+\omega=180^0 \Rightarrow 3\varphi-\theta=180^0 \ . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) λαμβάνουμε: $\varphi=72^0$ και $\theta=36^0$.

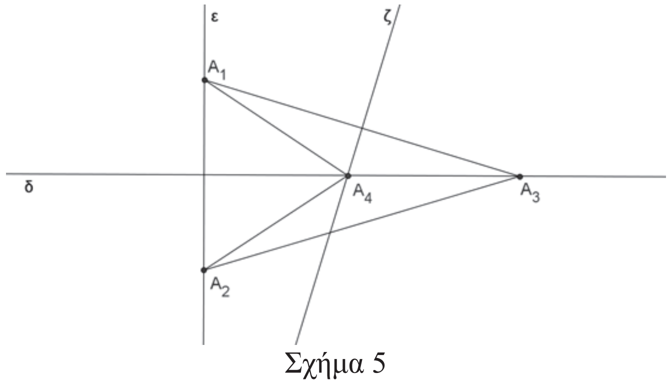


Σχήμα 4

(β) *Τα σημεία* A_3, A_4 *ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία* ε.

Έχουμε τρεις δυνατές περιπτώσεις:

- Το σημείο A_3 ανήκει στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και το σημείο A_4 λαμβάνεται ως η τομή των μεσοκάθετων δ και ζ των ευθύγραμμων τμημάτων A_1A_2 και A_1A_3, αντίστοιχα. Τότε και τα τέσσερα τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία A_1, A_2, A_3 και A_4 είναι ισοσκελή.



Σχήμα 5

Για να ανήκει το σημείο A_4 στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο A_3 θα πρέπει το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ να είναι οξυγώνιο, σχήμα 5.

- Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται έτσι ώστε το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ να είναι ρόμβος (ή τετράγωνο), δηλαδή πρέπει για το τετράγωνο να ισχύουν

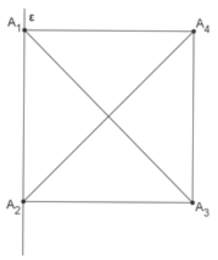
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3 \text{ και } A_1A_2 \perp A_1A_4,\ A_1A_2 \perp A_2A_3, \text{ σχήμα 6,}$$

ενώ για το ρόμβο πρέπει να ισχύουν

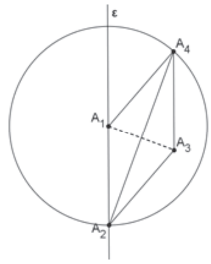
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3=A_2A_4, \text{ σχήμα 7.}$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε πρώτα το σημείο A_4 πάνω στο κύκλο $c(A_1, A_1A_2)$ έτσι ώστε $A_1A_2=A_1A_4$ και στη συνέχεια θεωρούμε το σημείο A_3 συμμετρικό του A_1 ως προς την ευθεία A_2A_4.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να θεωρηθούν τα σημεία A_3 και A_4 στο άλλο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

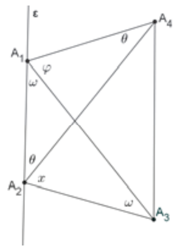


Σχήμα 6

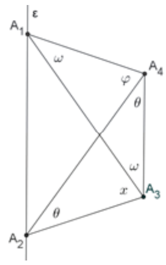


Σχήμα 7

- Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σημεία A_3 και A_4 σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, έτσι ώστε να σχηματίζονται από αυτά τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, σχήμα 8 και 9. Εργαζόμενοι όπως στην τρίτη υποπερίπτωση του (α), λαμβάνουμε τις ισότητες $\omega = \theta = 36^0$ και $\varphi = x = 72^0$.



Σχήμα 8

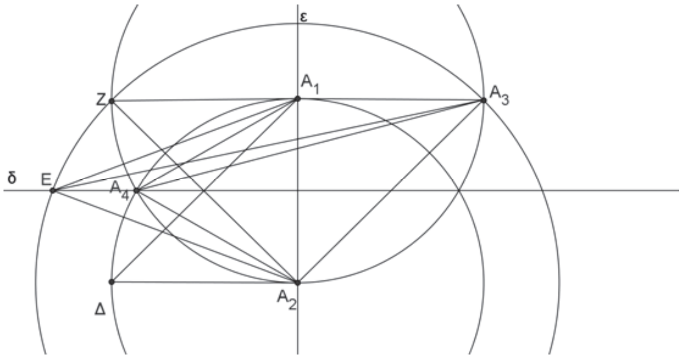


Σχήμα 9

Παρατηρήσεις

1. Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις έχουμε ισοσκελές τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$ του οποίου οι δύο ίσες πλευρές ισούνται με τη μικρή βάση του. Οι τρεις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου $A_1A_2A_3A_4$ αντιστοιχούν σε πλευρές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο που περνάει από τρεις κορυφές του, σχήματα 9 και 10. Αντίστοιχη παρατήρηση μπορεί να γίνει για την τρίτη υποπερίπτωση του (α), σχήμα 4.

2. Στην περίπτωση (α) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σημείο A_3 σε τέτοια θέση, ώστε να ισχύουν: $A_1A_3 = A_1A_2$ και $A_1A_3 \perp A_1A_2$, οπότε το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, σχήμα 10. Στη συνέχεια το σημείο A_4 πρέπει να τοποθετηθεί σε διαφορετικό ημιεπίπεδο σε σχέση με το A_3. Οι πιθανές θέσεις του φαίνονται στο σχήμα 10, αλλά στις τρεις περιπτώσεις ορίζονται τρία ακριβώς ισοσκελή τρίγωνα και στην τέταρτη με $A_4 \equiv \Delta$ μόνο δύο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν επιτυγχάνεται ο ορισμός του μέγιστου δυνατού αριθμού ισοσκελών τριγώνων.



Σχήμα 10