



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $A = k^4 + 4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = \frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} k^4 + 4 &= (k^2)^2 + 4k^2 + 2^2 - 4k^2 = (k^2 + 2)^2 - (2k)^2 \\ &= (k^2 + 2 - 2k)(k^2 + 2 + 2k) = [(k-1)^2 + 1^2][(k+1)^2 + 1^2]. \end{aligned}$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος επί $(2^4)^n$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\left(6^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left[(2n)^4 + \frac{1}{4}\right]}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\left(5^4 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left[(2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right]} \\ &= \frac{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4) \cdots [(4n)^4 + 4]}{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4) \cdots [(4n-2)^4 + 4]} \\ &= \frac{(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)(9^2 + 1)(11^2 + 1) \cdots [(4n-3)^2 + 1][(4n-1)^2 + 1][(4n+1)^2 + 1]}{(1^2 + 1)(3^2 + 1)(5^2 + 1)(7^2 + 1)(9^2 + 1)(11^2 + 1)(13^2 + 1) \cdots [(4n-3)^2 + 1][(4n-1)^2 + 1]} \\ &= \frac{(4n+1)^2 + 1}{1^2 + 1} = 8n^2 + 4n + 1 = 4n^2 + 4n^2 + 4n + 1 = (2n)^2 + (2n+1)^2. \end{aligned}$$

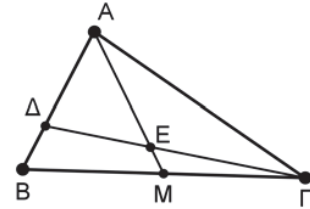
Παρατήρηση. Για το ερώτημα (β) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την παραγοντοποίηση

$$k^4 + \frac{1}{4} = \left(k^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2 = \left(k^2 + \frac{1}{2} - k\right)\left(k^2 + \frac{1}{2} + k\right) = \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right].$$

Για την απλοποίηση του κλάσματος εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

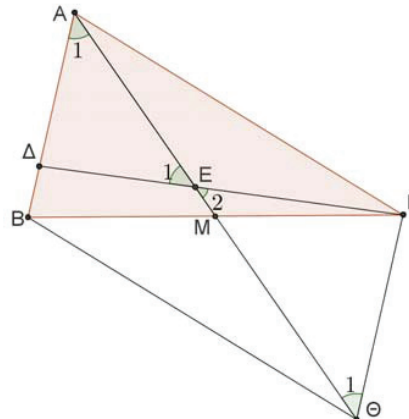
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E , τότε ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$.



Λύση (1^{ος} τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Theta = AM$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $AB\Theta\Gamma$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $AB \parallel \Gamma\Theta$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Theta}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{\Theta}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο $E\Gamma\Theta$ είναι ισοσκελές με $\Gamma E = \Gamma\Theta$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $AB\Theta\Gamma$ έχουμε ότι $AB = \Gamma\Theta$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $AB = \Gamma E$.

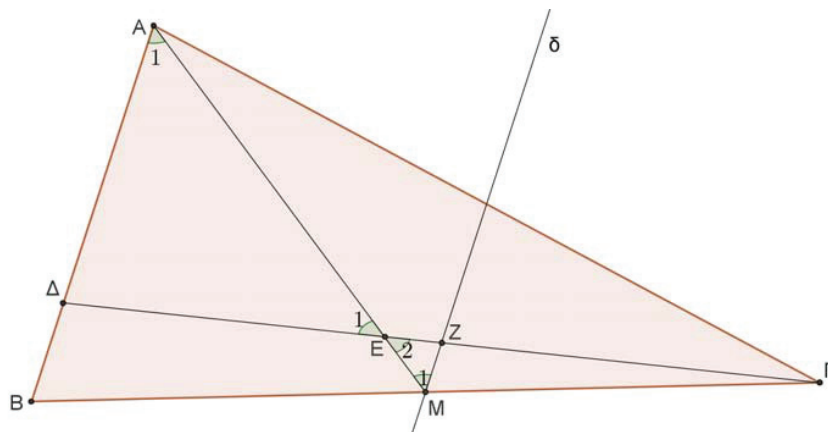
2^{ος} τρόπος

Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά AB , άρα και προς την πλευρά $B\Delta$ του τριγώνου $B\Gamma\Delta$, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, έστω στο σημείο Z . Τότε το Z θα είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$, δηλαδή

$$\Gamma Z = Z\Delta \quad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$B\Delta = 2 \cdot MZ. \quad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{M}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο EMZ είναι ισοσκελές με

$$ZM = EZ. \quad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma E &= \Gamma Z + ZE \\ &= \Delta Z + ZE \quad (\text{λόγω της (1)}) \\ &= \Delta E + 2 \cdot ZM \quad (\text{λόγω της (3)}) \\ &= A\Delta + \Delta B = AB. \quad (\text{λόγω της υπόθεσης και της (2)}) \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A+B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττούς ακέραιους, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A .

Λύση

Έχουμε ότι:

$$A+B = (a+d) \cdot 10^3 + (b+c) \cdot 10^2 + (b+c) \cdot 10 + (a+d).$$

Από την υπόθεση, όλα τα ψηφία του ακέραιου $A+B$ είναι περιττοί ακέραιοι. Όμως για την εύρεση των ψηφίων του ακέραιου $A+B$ πρέπει να ξέρουμε αν οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$ είναι μικρότεροι του 10. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} a+d &= 10+k, k=0,1,2,\dots,5, \\ b+c &= 10+\ell, \ell=0,1,2,\dots,5. \end{aligned}$$

Έτσι ο αριθμός $A+B$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} A+B &= (10+k) \cdot 10^3 + (10+\ell) \cdot 10^2 + (10+\ell) \cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + (k+1) \cdot 10^3 + (\ell+1) \cdot 10^2 + (\ell+1) \cdot 10 + k, \end{aligned}$$

δηλαδή έχει ψηφία $1, k+1, \ell+1, \ell+1, k$, τα οποία πρέπει να είναι περιττοί ακέραιοι, που είναι άτοπο, λόγω της ύπαρξης των διαδοχικών ακέραιων k και $k+1$.

(β) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c < 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε: $a+d = 10+k, k=0,1,2,\dots,5$ και ο αριθμός $A+B$ γράφεται

$$\begin{aligned} A+B &= (10+k) \cdot 10^3 + (b+c) \cdot 10^2 + (b+c) \cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + k \cdot 10^3 + (b+c) \cdot 10^2 + (b+c+1) \cdot 10 + k, \end{aligned}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b+c=9$, τότε ο $A+B$ έχει ψηφίο δεκάδων το 0, που είναι άρτιος, άτοπο.
- Αν $b+c < 9$, τότε ο $A+B$ έχει ψηφία τους ακέραιους $b+c$ και $b+c+1$ που δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δύο περιττοί.

(γ) Έστω $a+d < 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε: $b+c = 10+\ell, \ell=0,1,2,\dots,5$ και ο αριθμός $A+B$ γράφεται

$$\begin{aligned} A+B &= (a+d) \cdot 10^3 + (10+\ell) \cdot 10^2 + (10+\ell) \cdot 10 + (a+d) \\ &= (a+d+1) \cdot 10^3 + (\ell+1) \cdot 10^2 + \ell \cdot 10 + (a+d), \end{aligned}$$

οπότε οι ακέραιοι ℓ και $\ell+1$ είναι ψηφία του $A+B$, άτοπο.

(δ) Έστω $a+d < 10$ και $b+c < 10$. Τότε τα ψηφία του αριθμού $A+B$ είναι οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$, οι οποίοι πρέπει να είναι περιττοί. Λόγω των περιορισμών $a > b > c > d > 0$ και $a \geq 7$, έπεται ότι $a+d=9$ και επίσης $5 \geq c \geq 2, 6 \geq b \geq 3$, οπότε $10 > b+c \geq 5$, δηλαδή $b+c \in \{5,7,9\}$. Επομένως, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=9$ με $b=7, c=2$ ή $b=6, c=3$ ή $b=5, c=4$. Επομένως, προκύπτουν οι αριθμοί: $A=8721, A=8631, A=8541$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=9$ με $b=6, c=3$ ή $b=5, c=4$. Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $A=7632, A=7542$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=7$ με $b=5, c=2$ ή $b=4, c=3$. Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $A=8521, A=8431$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=7$ με $b=4, c=3$. Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $A=7432$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=5$ με $b=3, c=2$. Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $A=8321$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1$$

Λύση

Αν είναι $x \geq 3$ και $y \geq 3$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{z} = 1 - \frac{4}{z} < 1,$$

οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Επομένως θα είναι: $x \leq 2$ ή $y \leq 2$, οπότε πρέπει να ισχύει ένα από τα επόμενα: $x=1$ ή $x=2$ ή $y=1$ ή $y=2$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z = 2y \Leftrightarrow y = k, z = 2k$, όπου k θετικός ακέραιος, οπότε έχουμε τις λύσεις $(x, y, z) = (1, k, 2k), k \in \mathbb{Z}$ θετικός.

- Για $x=2$ η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{8+z}{2z} \Leftrightarrow y = \frac{4z}{z+8} \Leftrightarrow y = \frac{4(z+8)-32}{z+8} \Leftrightarrow y = 4 - \frac{32}{z+8}.$$

Επειδή ο y πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο $z+8$ πρέπει να είναι θετικός διαιρέτης του 32 και μεγαλύτερος του 8. Άρα οι δυνατές τιμές του $z+8$ είναι 16 ή 32, οπότε $z=8$ ή $z=24$. Για $z=8$ λαμβάνουμε $y=2$, ενώ για $z=24$ λαμβάνουμε $y=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις

$$(x, y, z) = (2, 2, 8) \text{ ή } (x, y, z) = (2, 3, 24).$$

- Για $y=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x} - \frac{4}{z} = -1 \Leftrightarrow \frac{4}{z} = \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow z = \frac{4x}{1+x} = 4 - \frac{4}{1+x}$.

Επειδή πρέπει ο z να είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο $1+x$ να είναι θετικός διαιρέτης του 4 και μεγαλύτερος του 1, δηλαδή πρέπει $1+x=2$ ή $1+x=4$ $\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$. Για $x=1$ λαμβάνουμε $z=2$, ενώ για $x=3$ λαμβάνουμε $z=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) \text{ ή } (x, y, z) = (3, 1, 3).$$

- Για $y=2$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x} - \frac{4}{z} = 0 \Leftrightarrow z = 4x \Leftrightarrow x = \ell, z = 4\ell$, όπου ℓ

θετικός ακέραιος. Άρα, στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις $(x, y, z) = (\ell, 2, 4\ell)$, όπου ℓ θετικός ακέραιος.

Συνολικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις επικαλύψεις των λύσεων που βρήκαμε, έχουμε τις λύσεις:

$$(x, y, z) = (1, k, 2k), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος,}$$

$$(x, y, z) = (\ell, 2, 4\ell), \text{ όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος,}$$

$$(x, y, z) = (3, 1, 3) \text{ και } (x, y, z) = (2, 3, 24).$$