ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση
$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$
έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση
Έχουμε $\Delta = (\alpha - 2)^2 + 4(\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 9\alpha^2 - 24\alpha + 16 = (3\alpha - 4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες
$$x_{1,2} = \frac{2 - \alpha \pm (3\alpha - 4)}{2} \Leftrightarrow x_1 = \alpha - 1,\ x_2 = -2\alpha + 3.$$
Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:
$$x_1 = x_2^2 \text{ ή } x_2 = x_1^2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = (-2\alpha + 3)^2 \text{ ή } -2\alpha + 3 = (\alpha - 1)^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha + 3 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 13\alpha + 10 = 0 \text{ ή } \alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = \frac{5}{4} \text{ ή } \alpha = \sqrt{2} \text{ ή } \alpha = -\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A} = (m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B} = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.
.
Λύση
Έστω $\mathrm{A} = (m+n)^3, \mathrm{B} = 2n(3m^2 + n^2) + 8$. Επειδή $(m+n)^3 \,|\, 2n(3m^2+n^2)+8$ πρέπει να είναι:
$$(m+n)^3 \leq 2n(3m^2+n^2) + 8 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \leq 6m^2n + 2n^3 + 8$$
$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 \leq 8 \Leftrightarrow (m-n)^3 \leq 8 \overset{m \geq n}{\Longleftrightarrow} m - n \leq 2 \Leftrightarrow m - n \in \{0,1,2\}.$$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
- $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n.$ Τότε $\mathrm{A} = 8m^3, \mathrm{B} = 8m^3 + 8$, οπότε
  $$\mathrm{A} \,|\, \mathrm{B} \Leftrightarrow 8m^3 \,|\, 8m^3 + 8 \Leftrightarrow 8m^3 \,|\, 8 \Leftrightarrow m = 1, \text{ αφού } m > 0 \Rightarrow (m,n) = (1,1).$$
- $m - n = 1$. Τότε έχουμε

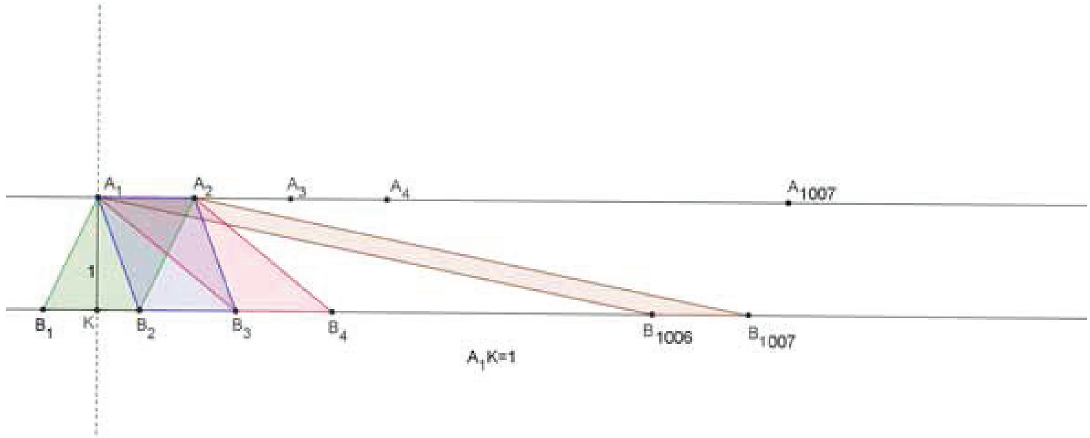
$$\mathrm{A} = (2n+1)^3, \mathrm{B} = 2n\left(3(n+1)^2 + n^2\right) + 8 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 8 = (2n+1)^3 + 7.$$

Επομένως, $\mathrm{A} \mid \mathrm{B} \Leftrightarrow (2n+1)^3 \mid 7 \Rightarrow 2n+1 = 1 \Leftrightarrow n = 0,\ m = 1$ και $(m,n) = (1,0)$.

- $m - n = 2$. Τότε $\mathrm{A} = 8(n+1)^3 = \mathrm{B}$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2, k)$, με $k \geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006 \cdot 1006 = 1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

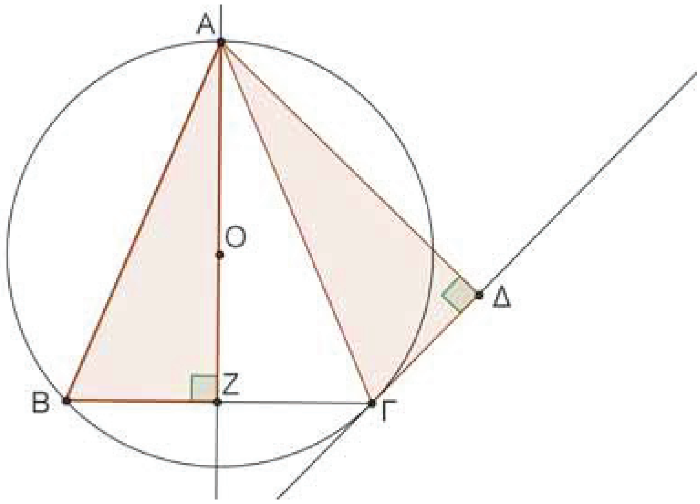
(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

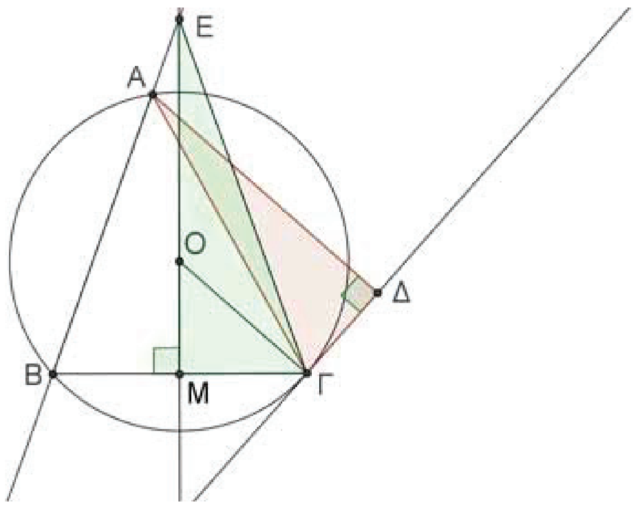
- $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$, αφού $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$, αφού $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma \mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{AB} < \mathrm{A}\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο Μ της $\mathrm{B}\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = \mathrm{B}\Gamma = 2\mathrm{BM}$, οπότε $\Gamma\Delta = \mathrm{BM}$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $\mathrm{A}\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{EB}$. Όμως $\mathrm{EB} = \mathrm{E}\Gamma$, οπότε $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 180° - \widehat{\mathrm{A}}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{EA}\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$ και το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3