ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Λύση
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
Αν $z = 0$, τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 80$.
Τότε πρέπει οι x, y να είναι πολλαπλάσια του 4, δηλαδή $x = 4a,\ y = 4b$, $0 \le a \le b$, και η εξίσωση γίνεται $a^2 + b^2 = 5$ οπότε $(a,b) = (1,2)$, δηλαδή $(x, y) = \mathbf{(4,8)}$.
Αν $z > 0$, τότε $7 \mid 2016^z$ (επειδή $7 \mid 2016$) και $7 \mid 77$, επομένως το 7 πρέπει να διαιρεί και το αριστερό μέλος, δηλαδή $7 \mid x^2 + y^2$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου με το 7 είναι τα ίδια με τα υπόλοιπα των $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ που είναι $0,1,2,4$. Οπότε, για να ισχύει $7 \mid x^2 + y^2$ πρέπει $7 \mid x, 7 \mid y$ και γράφουμε $x = 7x_1$ και $y = 7y_1$, με $0 \le x_1 \le y_1$.
Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^z + 77$.
Αν $z \ge 2$, τότε $49 \mid 2016^z$, οπότε αφού διαιρεί και το αριστερό μέλος, θα πρέπει $49 \mid 77$, που είναι άτοπο.
Αν $z = 1$, τότε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 7 \cdot 288 + 77 = 7(3 \cdot 288 + 11) = 7 \cdot 7 \cdot 125$. Δηλαδή πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 125$. Αφού $x_1 \le y_1$, έχουμε ότι $2y_1^2 \ge 125 \Rightarrow y_1 \ge 8$. Για $y_1 = 8,9,10,11$, βρίσκουμε τις λύσεις $(x_1, y_1) \in \{(5,10),(2,11)\}$
Τελικά οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{\mathbf{(4,8),(35,70),(14,77)}\}.$$

Πρόβλημα 2
Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},\ P(1) = 1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Λύση

Έστω $Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$ προέρχεται από το ανάπτυγμα των μεγιστοβάθμιων όρων $\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)^n-\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^n$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του τελευταίου ισούται με

$$\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}+\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}=\frac{4n}{2^n}x^{2n-1} \qquad (1).$$

Όμως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου στο αριστερό μέλος ισούται με 2, οπότε πρέπει $\frac{4n}{2^n}=2 \Leftrightarrow 2^{n+1}=4n$. Όμως $2^{n+1}>4n$ για $n\geq 3$, οπότε $n=1$ ή $n=2$ και από την (1) ο βαθμούς του P είναι $2-1=1$ ή $2\cdot 2-1=3$.

Για $x=0$ στην αρχική σχέση παίρνουμε $2P(0)=Q(1/2)-Q(1/2)=0$, άρα $P(0)=0$.

- Αν τώρα $n=1$, τότε $P(x)=ax$ και αφού $P(1)=1$, θα είναι
$$P(x)=x \text{ και } Q(x)=x+a_0,\ a_0\in\mathbb{R}.$$
- Αν $n=2$, τότε αν $Q(x)=x^2+bx+c$, έχουμε:
$$2P(x)=Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)=\frac{1}{4}\left((x+1)^4-(x-1)^4\right)+\frac{b}{2}\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}(8x^3+8x)+\frac{b}{2}(4x)=2x^3+2(1+b)x.$$

Επομένως, $P(x)=x^3+(1+b)x$. Επειδή επιπλέον $P(1)=1$, πρέπει $b=-1$, οπότε
$$P(x)=x^3 \text{ και } Q(x)=x^2-x+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$) και το ύψος του ΓΔ. Ο κύκλος $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ, την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο $c_1(B,B\Delta)$ στο σημείο Ε. Η ΔΖ τέλος τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{Ζ}\hat{\Delta}\text{Ε}=45^0$, **(β)** Τα σημεία Ε, Μ και Κ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,

(γ) Η ευθεία ΒΜ είναι παράλληλη με την ευθεία ΕΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1=90^0-\hat{\text{Β}}$.

Η διάκεντρος ΒΓ των κύκλων c_1 και c_2 είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους ΔΕ.

Αν λοιπόν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΕ,

τότε (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΤΔ) έχουμε: $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=90^0$, δηλαδή

$$\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=\hat{\text{Β}}=\hat{\Gamma}. \qquad (1)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΖ έχουμε: $\hat{\Delta}_1=\hat{\text{Ζ}}_1$ και $\hat{\Gamma}_2=2\hat{\Delta}_1=90^0-\hat{\text{Α}}$, οπότε

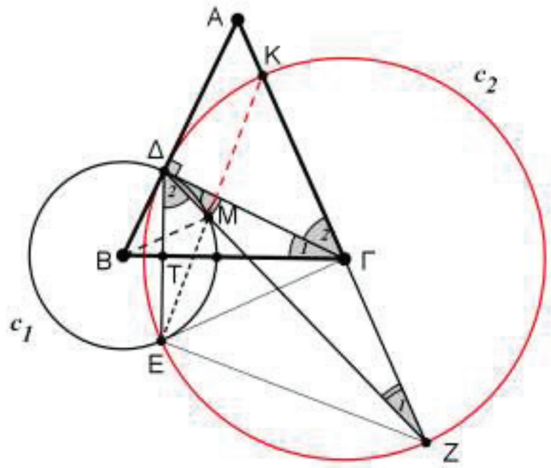
$$\hat{\Delta}_1=45^0-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}. \qquad (2)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{B} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{B} - \hat{\Delta}_1 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} - \left(45^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 45^0.$$



Σχήμα 1

(β) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από την χορδή ΔM και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ του κύκλου c_1, άρα $\Delta\hat{E}M = \hat{\Delta}_1$. Ισχύει επίσης $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{Z}K = \hat{Z}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c_2 και βαίνουν στο τόξο ΔK). Επειδή όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, θα ισχύει $\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{E}K$, οπότε τα σημεία E, M, K είναι συνευθειακά.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\hat{B}M = 90^0 - \hat{A}$.

Ισχύει: $\Delta\hat{B}M = 2\Delta\hat{E}M = 2\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90 - \hat{A}$, οπότε $BM \perp A\Gamma$.

Επιπλέον, ισχύει $E\hat{K}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 = 45^0$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο EZK είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $E\Gamma$ είναι και ύψος, δηλαδή $E\Gamma \perp KZ$.

Άρα $BM // E\Gamma$ (ως κάθετες στην ευθεία AZ).

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε "*καλό*", όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "*καλών*" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

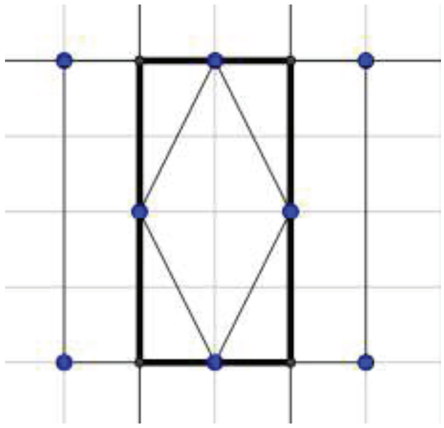
Λύση

Από τις κορυφές του ρόμβου φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τους πλέγματος, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το ρόμβο. Λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο του ρόμβου, θα πρέπει το ορθογώνιο αυτό να έχει άρτια μήκη πλευρών.

Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα ορθογώνια με άρτια μήκη πλευρών $2s\times 2t$ για τα οποία ισχύει $s\neq t$. Για το σκοπό αυτό θα μετρήσουμε όλα τα ορθογώνια $2s\times 2t$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$.

- Έστω ότι $n=2k$

Αριθμούμε τις κάθετες ευθείες του πλέγματος από αριστερά προς τα δεξιά $1,2,3,...,2k+1$ και τις γραμμές του πλέγματος, από κάτω προς τα πάνω $1,2,3,...,2k+1$. Ένα ορθογώνιο $2s\times 2t$ προσδιορίζεται από δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος και δύο οριζόντιες που έχουν άρτια



Σχήμα 2

απόσταση. Για να έχουν άρτια απόσταση πρέπει και οι δύο να έχουν άρτιο αριθμό ή και οι δύο περιττό αριθμό. Για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτιο αριθμό έχουμε $\binom{k}{2}$ επιλογές, ενώ για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με περιττό αριθμό έχουμε $\binom{k+1}{2}$ επιλογές. Οπότε για να επιλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτια απόσταση έχουμε $\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=k^2$ επιλογές.

Όμοια, έχουμε k^2 επιλογές για τις στήλες. Οπότε συνολικά έχουμε $k^2\cdot k^2=k^4$ ορθογώνια $2s\times 2t$. Μένει τώρα να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$. Τα 2×2 τετράγωνα είναι $(n-2+1)^2=(2k-2+1)^2$. Τα 4×4 είναι $(n-4+1)^2=(2k-4+1)^2$. Γενικά τα $2s\times 2s$ είναι $(n-2s+1)^2=(2k-2s+1)^2$. Άρα όλα μαζί είναι

$$\sum_{s=1}^{k}(2k-2s+1)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+1)^2-4s(2k+1)+4s^2=$$

$$k(2k+1)^2-2(2k+1)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως οι ρόμβοι είναι: $k^4-\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k-1)(3k^2-k-1)}{3}$.

- Όταν $n=2k+1$, εντελώς όμοια με παραπάνω έχουμε $\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{2}=k(k+1)$

επιλογές για την επιλογή των δύο κάθετων γραμμών και $k(k+1)$ επιλογές για την επιλογή των οριζόντιων. Επομένως έχουμε συνολικά $(k(k+1))^2$ ορθογώνια $2s\times 2t$ και πρέπει να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$ που είναι $(n-2s+1)^2=(2k+1-2s+1)^2=(2k+2-2s)^2$. Δηλαδή συνολικά

$$\sum_{s=1}^{k}(2k+2-2s)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+2)^2-4(2k+2)s+4s^2$$

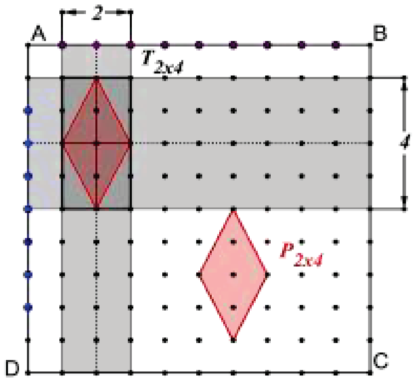
$$=k(2k+2)^2-2(2k+2)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως, οι ρόμβοι είναι συνολικά:

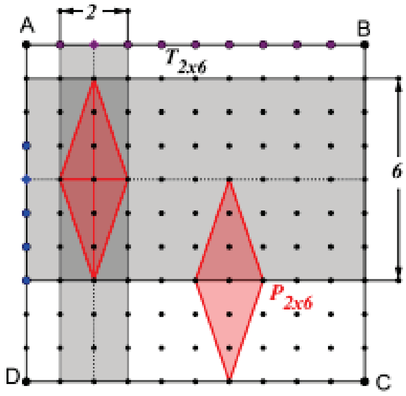
$$(k(k+1))^2-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{3}$$

2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι το μήκος των πλευρών των στοιχειωδών τετραγώνων είναι 1.
Αν οι διαγώνιες του ρόμβου είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου, τότε οι κορυφές του θα είναι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη πολλαπλάσια του 2 και είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στα δύο παραπάνω σχήματα βλέπουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$).
Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x4} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x4}.
Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x6} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x6} …
Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{(2m)x(2k)}$, όπου m,k ακέραιοι με $1 \le m < k \le l$, όταν $n = 2l$.
Για $m = 1$ και $k = 2$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x4} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x2}) είναι $(n-1)(n-3)$.
Για $m = 1$ και $k = 3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x2}) είναι $(n-1)(n-5)$.
…………
Για $m = 1$ και $k = l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{2x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x2}$) είναι $(n-1)(n-2l+1)=(n-1)\cdot 1$.
Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 2, είναι: $S_2 = 2\big((n-1)(n-3)+(n-1)(n-5)+\cdots+(n-1)\cdot 1\big)=$

$$= 2(n-1)\big((n-3)+(n-5)+\cdots+1\big)=$$

$$= 2(n-1)\frac{1+(n-3)}{2}\cdot\frac{n-2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)^2}{2}.$$

Για $m = 2$ και $k = 3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x4}) είναι $(n-3)(n-5)$.
Για $m = 2$ και $k = 4$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 8, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-7$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x8} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{8x4}) είναι $(n-3)(n-7)$.
…………
Για $m = 2$ και $k = l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{4x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x4}$) είναι $(n-3)(n-2l+1) = (n-3)\cdot 1$.
Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 4, είναι: $S_4 = 2\big((n-3)(n-5)+(n-3)(n-7)+\cdots+(n-3)\cdot 1\big) =$

$$= 2(n-3)\big((n-5)+(n-7)+\cdots+1\big) =$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)^2}{2}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας και επεκτείνοντας τη διαδικασία έχουμε:

$$S_2 = 2(n-1)(n-l-1)(l-1) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}, & n = 2l \\ \dfrac{(n-3)(n-1)^2}{2}, & n = 2l+1 \end{cases}$$

$$S_4 = 2(n-3)(n-l-2)(l-2) = \begin{cases} \dfrac{(n-3)(n-4)^2}{2}, & n = 2l \\ \dfrac{(n-5)(n-3)^2}{2}, & n = 2l+1 \end{cases}$$

$$S_6 = 2(n-5)(n-l-3)(l-3) = \begin{cases} \dfrac{(n-5)(n-6)^2}{2}, & n = 2l \\ \dfrac{(n-7)(n-5)^2}{2}, & n = 2l+1 \end{cases}$$

………………………………………………

$$S_{2l-4}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot 4^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{6\cdot 8^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l-2}=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{4\cdot 6^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l}=\begin{cases}0, & n=2l\\ \dfrac{2\cdot 4^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}+\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}+\cdots+\frac{5\cdot 4^2}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2}$$
$$=\frac{(n-2)^3+(n-2)^2}{2}+\frac{(n-4)^3+(n-4)^2}{2}+\ldots+\frac{4^3+4^2}{2}+\frac{2^3+2^2}{2}.$$

Γράφοντας $n=2l$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S=\frac{8(l-1)^3+4(l-1)^2}{2}+\frac{8(l-2)^3+4(l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{8\cdot 2^3+4\cdot 2^2}{2}+\frac{8+4}{2}=$$
$$=4((l-1)^3+(l-2)^3+\ldots+1)+2((l-1)^2+\ldots+1)=$$
$$=\big(l(l-1)\big)^2+2\cdot\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}=l(l-1)\left(l(l-1)+\frac{2l-1}{3}\right)=\frac{l(l-1)(3l^2-l-1)}{3}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l+1$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S'=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}+S_{2l}=\frac{(n-3)(n-1)^2}{2}+\frac{(n-5)(n-3)^2}{2}+\cdots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}$$ Γ

ράφοντας $n=2l+1$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S'=\frac{(2l-2)(2l)^2}{2}+\frac{(2l-4)(2l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}=$$
$$=4(l^3-l^2)+4((l-1)^3-(l-1)^2)+\ldots+4(3^3-2^3)+4(2^3-2^2)+4(1^3-1^2)=$$
$$=4((l^3+(l-1)^3+\ldots+1)-(l^2+(l-1)^2+\ldots+1))=$$
$$=(l(l+1))^2-2\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}=\frac{l(l+1)(3l^2-l-2)}{3}.$$

Τους δύο τύπους μπορούμε να τους συνοψίσουμε με τη βοήθεια του ακεραίου μέρους ως:

$$\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\right)}{3}.$$