**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

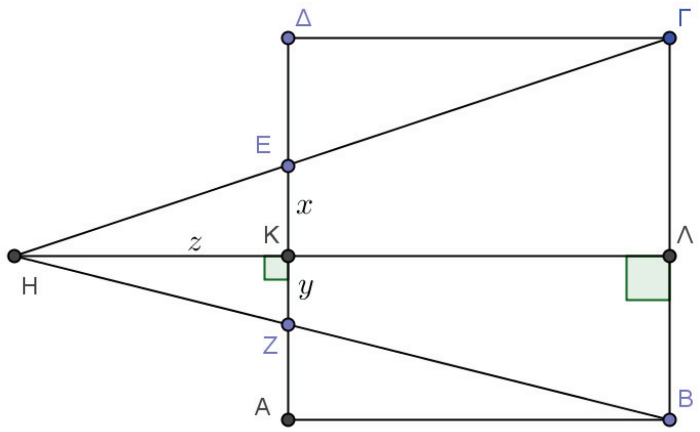
# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
# 4 Μαρτίου 2017

## Θέματα μικρών τάξεων

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\alpha$. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta\mathrm{E} = \frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{AZ} = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του $\alpha$.

**Λύση (1ος τρόπος)**




Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = $x$, ΚΖ = $y$ και ΚΗ = $z$. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{B\Gamma}\cdot \mathrm{H\Lambda} = \frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+z\right) \quad . \tag{1}$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{H} = 90^o$ και $\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{K}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{\mathrm{KH}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{KE}}{\Delta\mathrm{E}} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \tag{2}$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\text{ΚΗ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΚΖ}}{\text{ΑΖ}}\Leftrightarrow\frac{z}{\alpha}=\frac{y}{\frac{\alpha}{4}}\Leftrightarrow z=4y \qquad . \qquad (3)$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x+y=\text{ΑΔ}-\text{ΑΖ}-\text{ΔΕ}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x+y=\frac{5\alpha}{12}\Leftrightarrow\frac{z}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5\alpha}{12}\Leftrightarrow z=\frac{5\alpha}{7},$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\text{Ε}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+\frac{5\alpha}{7}\right)=\frac{12\alpha^2}{14}=\frac{6\alpha^2}{7}.$$

**2$^{ος}$ τρόπος.** Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\text{ΖΕ}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΖΕΓΒ είναι:

$$(\text{ΖΕΓΒ})=\frac{\frac{5\alpha}{12}+\alpha}{2}\cdot a=\frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ΖΗΕ και ΒΗΓ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(\text{ΒΗΓ})}{(\text{ΖΗΕ})}=\left(\frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΖΕ}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(\text{ΒΗΓ})}{(\text{ΒΗΓ})-(\text{ΒΖΕΓ})}=\left(\frac{12}{5}\right)^2\Leftrightarrow\frac{(\text{ΒΗΓ})}{(\text{ΒΗΓ})-\frac{17\alpha^2}{24}}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς (ΒΗΓ) παίρνουμε ότι $(\text{ΒΗΓ})=\frac{6\alpha^2}{7}$.

**Πρόβλημα 2**
Αν $x,y,z$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}..$$

**Λύση (1$^{ος}$ τρόπος)**
Επειδή είναι $x,y,z>0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0<x<6,\ 0<y<6,\ 0<z<6.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(6-x)(6-y)(6-z)=9^3\Leftrightarrow x(6-x)y(6-y)z(6-z)=9^3. \quad (1)$$

Όμως ισχύει ότι

$$0<x(6-x)=6x-x^2=9-(3-x)^2\leq 9. \qquad (2)$$

Η ισότητα ισχύει για $x=3$. Ομοίως ισχύουν και οι σχέσεις

$$0\leq y(6-y)\leq 9 \qquad (3)$$

$$0 \le z(6-z) \le 9 \qquad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3) και (4), λαμβάνουμε

$$0 < x(6-x)y(6-y)z(6-z) \le 9^3, \qquad (5)$$

οπότε σε σύγκριση με την (1) προκύπτει ότι οι σχέσεις (2), (3) και (4) πρέπει να ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $x = y = z = 3$.

Εναλλακτικά οι σχέσεις (2) , (3) και (4) μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου. Για παράδειγμα, αφού $x, 6-x > 0$, έχουμε

$$0 < \sqrt{x(6-x)} \le \frac{x+6-x}{2} = 3 \Rightarrow 0 < x(6-x) \le 9.$$

**$2^{ος}$ τρόπος:** Επειδή είναι $x, y, z > 0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0 < x < 6,\ 0 < y < 6,\ 0 < z < 6.$$

Από τους τρεις αριθμούς κάποιος είναι ο μικρότερος, έστω $x \le y$ και $x \le z$. Τότε έχουμε

$$9 = x(6-y) \le x(6-x) \le z(6-x) = 9,$$

οπότε έπεται ότι

$$x(6-x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $y = 3$ και $z = 3$.

**Πρόβλημα 3**

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $a, b, p,$ όπου $p$ πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

**Λύση**

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2 + b^2\right) = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Επειδή $p$ πρώτος, από την (1) προκύπτει ότι: $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Υποθέτουμε ότι $p \mid a$, οπότε $a = pa_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow b^2 > p \Rightarrow b^2 \ge p+1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 a_1^2} \ge \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2 + p} \ge \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 \le 2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a = p.$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p\left(p^2 + b^2\right) = p^2 b^2 \Leftrightarrow p^2 + b^2 = pb^2 \Leftrightarrow p^2 = (p-1)b^2 \Leftrightarrow p^2 - 1 = (p-1)b^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) = (p-1)b^2 - 1 \Rightarrow (p-1) \mid 1 \overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow} p - 1 = 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

Επομένως, έχουμε $a = p = 2$ και από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $b = 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν υποθέσουμε ότι $p \mid b.$

**$2^{ος}$ τρόπος.** Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (1)$$

Λύνοντας ως προς $a^2$ έχουμε ότι

$$a^2=\frac{pb^2}{b^2-p}=\frac{p(b^2-p)+p^2}{b^2-p}=p+\frac{p^2}{b^2-p}. \qquad (2)$$

Αφού ο $a^2$ είναι ακέραιος, θα πρέπει $b^2-p\mid p^2$, επομένως

$$b^2-p=1, \quad ή \quad b^2-p=p, \quad ή \quad b^2-p=p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $b^2-p=1 \Leftrightarrow p=b^2-1=(b-1)(b+1)$ και αφού $p$ πρώτος, θα πρέπει $b-1=1$, άρα $b=2$ και $p=3$. Τότε είναι $a^2=12$, άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $b^2=2p$. Τότε $b$ άρτιος, έστω $b=2b_1$, οπότε $4b_1^2=2p$, άρα $2\mid p$, άρα και πάλι $p=2$ και $b=2$, οπότε και $a=2$. Στην τρίτη περίπτωση η (2) δίνει $a^2=p+1 \Leftrightarrow p=a^2-1=(a-1)(a+1)$, οπότε αφού $p$ πρώτος, θα πρέπει $a-1=1$, άρα $a=2$ και $p=3$, οπότε προκύπτει $b^2=3$, άτοπο.

**Πρόβλημα 4.**

Μία παρέα που αποτελείται από $n$ άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

**(α)** Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα

**(β)** Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από $n$ γύρους

**(γ)** Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $n$.

**Λύση**

Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2}=3$. Επομένως όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από $n$ γύρους, θα έχουν παίξει μαζί $3n$ δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το $3n$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{n}{2}$. Δηλαδή, πρέπει:

$$\binom{n}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}\le 3 \Leftrightarrow n\le 7.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $n=7$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Πράγματι, για $n=7$ είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21=3\cdot 7$$

και αν υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι οι : Α,Β,.Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δύο να έχουν παίξει ένα παιγνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μία τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες:

(Α, Β, Γ), (Α, Δ, Ε), (Α, Ζ, Η), (Β, Δ, Η), (Β, Ε, Ζ), (Γ, Δ, Ζ), (Γ, Ε, Η).