ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n),\ n\in\mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1}=3x_n^3+x_n$, με $x_1=\frac{a}{b}$, όπου a,b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m=3x_{m-1}^3+x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1}=\frac{p}{q}$ όπου ο q δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p,q)=1$. Τότε

$$x_m=3x_{m-1}^3+x_{m-1}=\frac{3p^3+pq^2}{q^3}=\frac{p(3p^2+q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p,q)=1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m. Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2+q^2),\ q^3$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s\,|\,q^3\Rightarrow s\,|\,q$ και $s\,|\,3p^2+q^2$ τότε $s\,|\,3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p, θα έχουμε $s\,|\,3\Rightarrow s=3$, $3\,|\,q$, άτοπο από την (*).

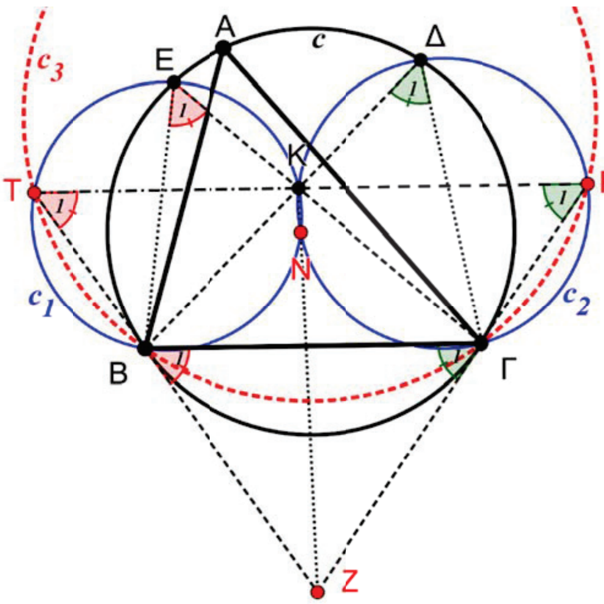
Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.
Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q=a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2+q^2)=\kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι. Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2+q^2$, τότε $t\,|\,q$, που είναι άτοπο αφού $(p,q)=1$.

Έτσι $p=b^2,\ \ 2p^2+q^2=c^2$. Επομένως $x_{m-1}=\frac{p}{q}=\frac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο

τετράγωνο ρητού.
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα $ΑΓ$ και $ΑΒ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Έστω $Κ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $ΒΚΕ$, έστω c_1, και $ΓΚΔ$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $Α, Κ, Ν$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο $Κ$ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $ΑΒΓ$, που αντιστοιχεί στην κορυφή $Α$.
Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Λύση



Σχήμα 1

1ος Τρόπος
Έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη $Ζ$ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $Β, Γ$ του κύκλου c. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $Κ, Ν, Ζ$ είναι συνευθειακά.
Σημειώνουμε με $Τ$ τη τομή της $ΒΖ$ με τον c_1 και $Ρ$ τη τομή της $ΖΓ$ με τον c_2, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{Ε}_1 = \hat{Τ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_1 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΒΚ$)

$\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_1$: (η $\hat{Β}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτομένη $ΒΖ$ στο κύκλο c)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Ρ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΓΚ$)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$: (η $\hat{Γ}_1$ είναι γωνία της χορδής $ΒΓ$ και την εφαπτομένης $ΓΖ$ στο κύκλο c)

$$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 : \text{ (οι } ZB \text{ και } Z\Gamma \text{ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο } c\text{)}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{B}_1 = \hat{T}_1 \text{ , άρα } KT//B\Gamma \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1 \text{, άρα } KP//B\Gamma .$$

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3).

Άρα η κοινή χορδή KN των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Z των κύκλων c_1, c_2, c_3.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N, T είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία A, K, N θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο AT.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο AT , τότε τα σημεία A, K, T θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

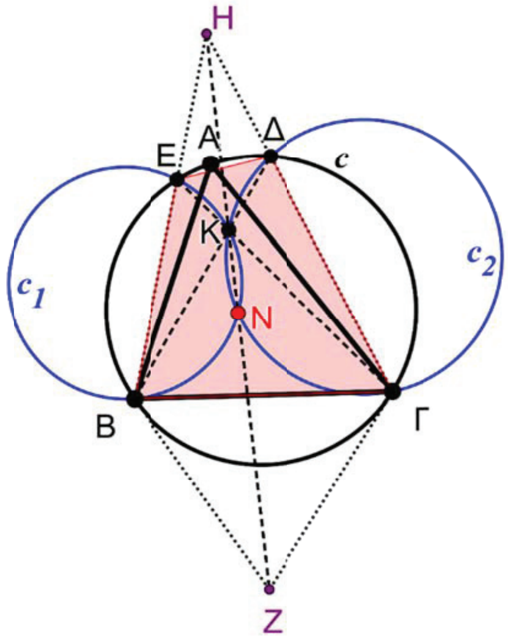
2^{ος} Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c. Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία H, K, Z είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c. Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$.

Άρα τα σημεία K, N, H είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ.

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.
(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{m-1}| = \\
&= |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \ldots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| \\
&= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{m-1} - a_m \\
&= a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\
&= |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \ldots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}|
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.
1η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2$. Όμοια $P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3, \ldots., P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \ldots = P(a_m) - a_m = k \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x - k$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

2η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$.Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n , έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \; P(p) - P(r) = r - p \; .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r \; . (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$| a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b | = | a_i - a_j | \Leftrightarrow | a | = 1$$

οπότε $P(x) = x + b, \;$ ή $\; P(x) = -x + b$.

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$, τότε είτε $P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = ... = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $| a_i | < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\,(1)$$

και

$$|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\le|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n}{n^{n-1}}<1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

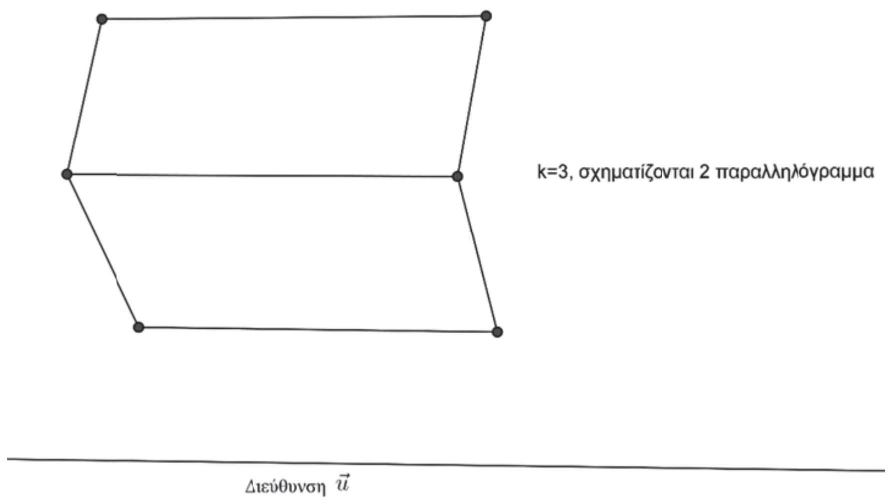
Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n\ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n)\le\dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n\ge 4$.

Λύση

Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.



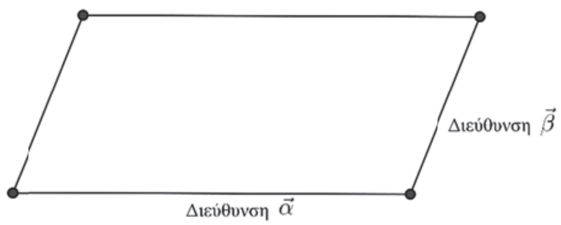
Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\dbinom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2}-s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

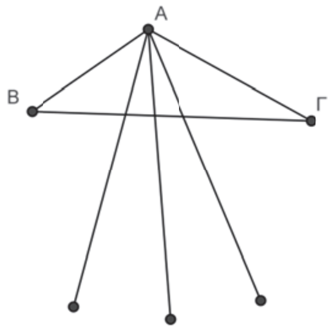


Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο A συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το A, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-n}{2}=\frac{n^2-3n}{4}.$$