ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1
(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.
(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Λύση
(α) Έστω $x+\sqrt{3}=q,\ x^2+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$x=q-\sqrt{3}\Rightarrow x^2=q^2-2q\sqrt{3}+3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^2-2q\sqrt{3}+3\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(2q-1\right)=p-q^2-3$$

Τότε πρέπει $2q-1=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p=q^2+3\Rightarrow q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$ και $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

(β) Έστω $y+\sqrt{3}=q,\ y^3+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$y=q-\sqrt{3}\Rightarrow y^3=q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow-\sqrt{3}\left(3q^2+2\right)=p-q^3-9q\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}=\frac{q^3+9q-p}{3q^2+2}\in\mathbb{Q}$$

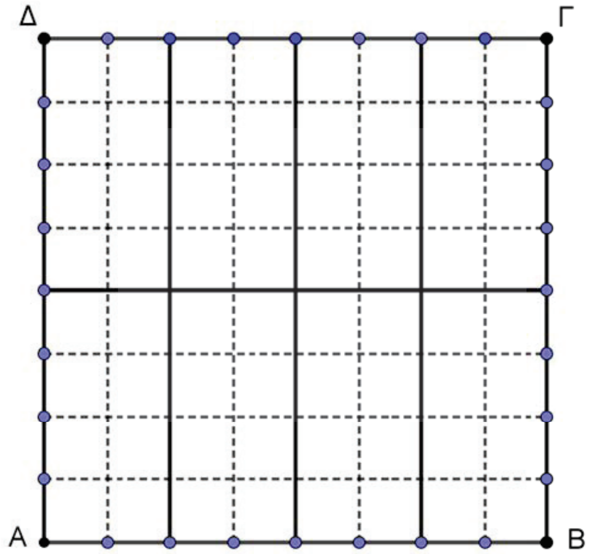
που είναι άτοπο.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία

αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

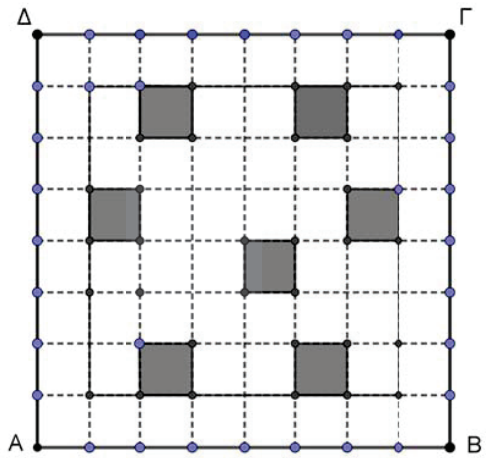
Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια 4×2. Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά 4×2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4×2 ορθογώνιο εμβαδού $8\,\mathrm{cm}^2$.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\mathrm{cm}^2$. Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6×6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\mathrm{cm}^2$.



Σχήμα 2

Σημείωση: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχείρημα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Έστω $\frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \kappa \in \mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2+4a = \kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο a είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2 \mid a$, τότε θα πρέπει $2 \mid (a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο b να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς b, στη μορφή:

$$b^2 + b(2-\kappa)a + a^2 + 4a = 0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta = a^2(\kappa-2)^2 - 4(a^2+4a) = a(a(\kappa-2)^2 - 4a - 16)$. Επομένως το γινόμενο των a, $a(\kappa-2)^2 - 4a - 16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο a είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

2^{ος} τρόπος:

Έστω $d = (a,b)$ και γράφουμε $a = dx, b = dy$, με $(x,y) = 1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d \mid b$ και ο b είναι περιττός, θα πρέπει d περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \frac{d^2(x+y)^2+4dx}{d^2xy} = \frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow x \mid dy^2$ και επειδή $(x,y)=1$, πρέπει $x \mid d$. Επίσης, $d \mid d(x+y)^2 + 4x \Rightarrow d \mid 4x$ και αφού d περιττός, $d \mid x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d = x$, άρα $a = d^2$.

Πρόβλημα 4

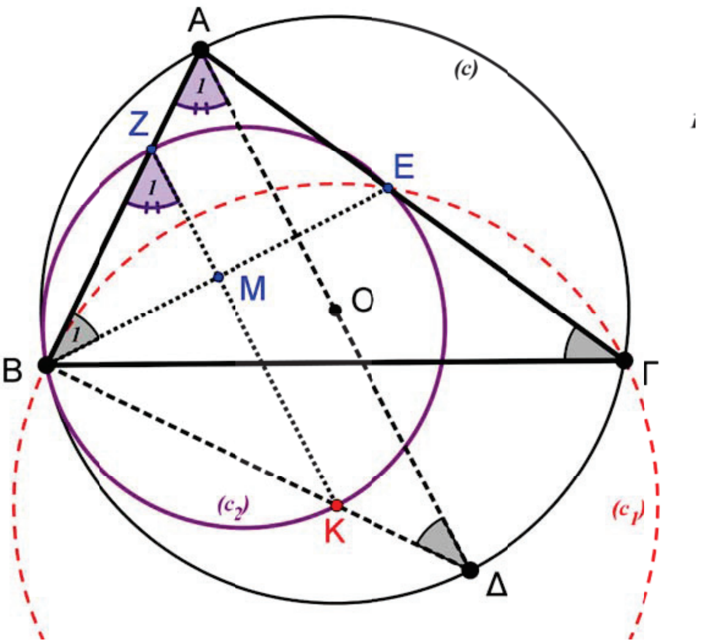
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BKE, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Λύση (1[ος] Τρόπος)

Έστω Z η τομή του κύκλου c_2 με την AB και M η τομή της KZ με την BE. Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Delta}$ (άρα και η γωνία $\mathrm{Z\hat{B}K}$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο $\mathrm{A\Delta}$ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $\mathrm{Z\hat{B}K}=90°$, η ZK είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ZK θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής BE των κύκλων c_1 και c_2. Η AB εφάπτεται στον κύκλο c_1, άρα $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο BMZ έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{Z}_1}=90°-\widehat{\mathrm{B}_1}=90°-\widehat{\Gamma} \quad . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta},\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta}=\hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$, έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1=90°-\hat{\Delta}=90°-\hat{\Gamma}\quad(2)$.

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\mathrm{A}_1}=\widehat{\mathrm{Z}_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{A\Delta}$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $\mathrm{A\Delta KZ}$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το O είναι το μέσο της $\mathrm{A\Delta}$, συμπεραίνουμε ότι η OB θα διέρχεται από το μέσο της KZ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2. Άρα τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{Z}}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{A\Delta}$ και KZ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο B.
Εφόσον τα τμήματα $\mathrm{A\Delta}$ και KZ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το B και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c, c_2 και το σημείο B θα είναι συνευθειακά.

2[ος] τρόπος

Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο B. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B. Έστω BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο B και ονομάζουμε $\widehat{\mathrm{KBP}} = \omega$. Για να δείξουμε ότι η BP είναι εφαπτομένη του c_2 στο B, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{\mathrm{BEK}} = \omega \;. \qquad (1)$$

Επειδή η BP η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{\mathrm{\Delta\Gamma B}} = \omega$. Επιπλέον η $\mathrm{A\Delta}$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{\mathrm{A\Gamma\Delta}} = 90^\circ$, οπότε $\widehat{\mathrm{E\Gamma B}} = 90^\circ - \omega$. Όμως

$$\widehat{\mathrm{BKE}} = 2\widehat{\mathrm{B\Gamma E}} = 2(90^\circ - \omega) = 180^\circ - 2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1. Όμως το τρίγωνο BKE είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{\mathrm{KBE}} = \widehat{\mathrm{KEB}} = \omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.