



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή **φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται.
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
8. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **24 Φεβρουαρίου 2007** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **24^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ρόδος, 26 Απριλίου – 2 Μαΐου 2007)**, στην **11^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Βουλγαρία, Ιούνιος 2007)** και στην **48η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Βιετνάμ, Ιούλιος 2007)**.
9. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

10. Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ μαζί με τα γραπτά να μας στείλει το ονοματεπώνυμο και την ταχυδρομική διεύθυνση όλων των επιτηρητών για να τους σταλεί ονομαστική ευχαριστήρια επιστολή από το Δ.Σ. της ΕΜΕ.

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\frac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.
2. Θεωρούμε οξεία γωνία \widehat{AOB} και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $OD \perp OA$ και ευθεία $OE \perp OB$. Αν είναι $\widehat{GOE} = 4\widehat{AOB}$, να υπολογίσετε τη γωνία \widehat{AOB} .
3. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma - \delta)(\gamma + \delta) \neq 0$ και
$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma - \delta} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma + \delta},$$
 να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισούται με 0.
4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $xyzxyz$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία

$$\text{και } \text{KK}_1 + \text{ΛΛ}_1 = \frac{1}{2}(\text{MK} + \text{MΛ}) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Άρα είναι } (\text{KK}_1\text{ΛΛ}_1) = \frac{1}{2}(\text{KK}_1 + \text{ΛΛ}_1)\text{K}_1\text{Λ}_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \dots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\text{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \text{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} x - y &= (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta \\ &= \alpha(\gamma - \beta) + \delta(\beta - \gamma) = (\gamma - \beta)(\alpha - \delta) < 0. \end{aligned}$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta - \gamma)(\alpha - \beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\text{MBΓ}} = \widehat{\text{MΓB}}$, το τρίγωνο MBΓ είναι ισοσκελές με

$$\text{MB} = \text{MΓ}. \quad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, $\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}$, $\widehat{\text{ΜΑΔ}} = \widehat{\text{ΜΑΕ}}$.

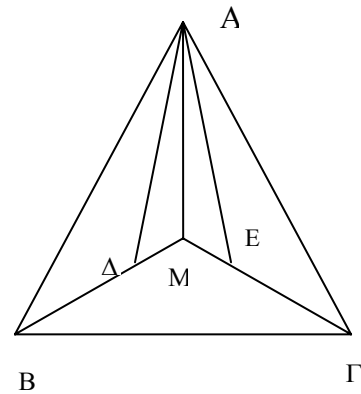
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\text{ΑΜΔ}} = \widehat{\text{ΑΜΕ}}. \quad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ},$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$x^3 + y^2 \leq 64 \Rightarrow x^3 < 64$ και $y^2 < 64 \Rightarrow x < 4$ και $y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3$ και $y^3 < 8y^2$,

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8(x^3 + y^2) \leq 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \quad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε: