$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot(y+11z)=49000 \Rightarrow 9 \mid 49000,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

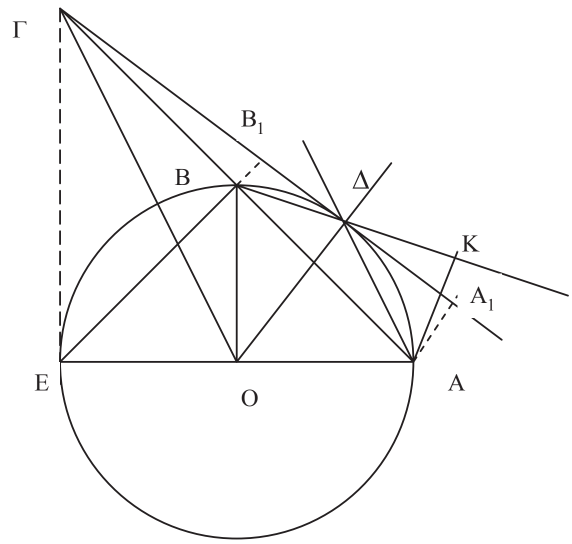
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3) &= (1-x_1)(1+x_1)(1-x_2)(1+x_2)(1-x_3)(1+x_3)\\
&= (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\\
&= \mathrm{P}(1)\left[-(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)\right]\\
&= -\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1) = -(1+\kappa+\lambda)(-1-\kappa+\lambda)=(1+\kappa)^2-\lambda^2.
\end{aligned}$$

2.



1ος Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^o$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta} \approx \overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\mathrm{OB}\parallel \mathrm{E}\Gamma \Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp \mathrm{OE} \Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E} \text{ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} \Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

$$\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$$

2ος Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\mathrm{K\Delta A}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\mathrm{KA} = \mathrm{K\Delta} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\mathrm{AA_1} \perp \Gamma\Delta$, $\mathrm{BB_1} \perp \Gamma\Delta$ και $\mathrm{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}}\right)^2 = \frac{\Delta\mathrm{A}^2 / 2R}{\Delta\mathrm{B}^2 / 2R} = \frac{\mathrm{AA_1}}{\mathrm{BB_1}} = \frac{\Gamma\mathrm{A}}{\Gamma\mathrm{B}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\Delta\mathrm{B} = \frac{\mathrm{A\Delta}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι ΔΒ = ΚΔ = ΚΑ

και

$$\mathrm{KB} = \mathrm{K\Delta} + \Delta\mathrm{B} = 2\cdot \mathrm{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

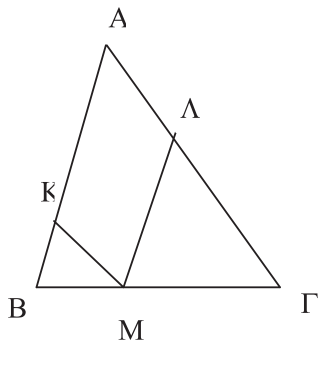
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}+\overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^\alpha\left(\beta^3\right)^\beta} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^\alpha\beta^\beta\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\mathrm{MB} = \kappa$ και $\mathrm{M\Gamma} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\frac{-2\gamma^2 / \alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right) / \alpha^2} = \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το

ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{M\Gamma}} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2^ος^ τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $S\min=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\dfrac{\kappa}{\lambda}=\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^x=2,\ 150^y=3$

$$A=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^x\cdot150^y}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2^ος^ τρόπος

$$\log_{150}A=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}K(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=P(1)P(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$