ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-2\cdot 2\cdot(4x+5y)-6\cdot(8x+10y)\\&=2008-2\cdot(8x+10y)-6\cdot(8x+10y)=2008-2\cdot 1-6\cdot 1=2000.\end{aligned}$$

(2$^{\text{ος}}$ τρόπος)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-16x-20y-48x-60y\\&=2008-64x-80y=2008-8(8x+10y)=2008-8\cdot 1=2000.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού a;

Λύση
Αν π είναι το πηλίκο και υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε $\pi=6\upsilon+5$ και

$$a=5(6\upsilon+5)+\upsilon,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow a=31\upsilon+25,\ \ \upsilon\in\{1,2,3,4\}.$$

Η τιμή $\upsilon=0$ αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.

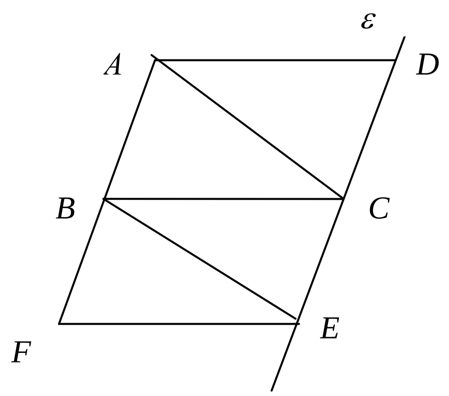
- Για $\upsilon=1$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 1+25=56$.
- Για $\upsilon=2$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 2+25=87$.
- Για $\upsilon=3$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 3+25=118$
- Για $\upsilon=4$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 4+25=149$.

Άρα οι δυνατές τιμές του τριψήφιου αριθμού a είναι : $a=118$ ή $a=149$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται το τρίγωνο ABC και η ευθεία ε που περνάει από το C και είναι παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον δίνεται ότι

$$CD=CE=AB.$$

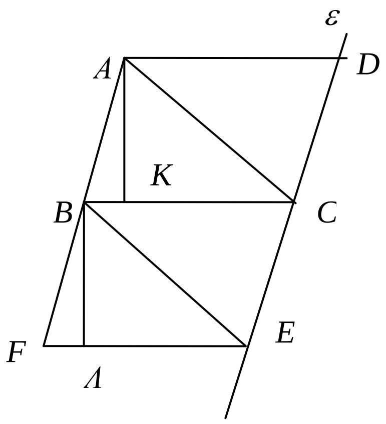
Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.
α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;

Λύση

α) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $BFEC$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι $AD = BC = FE$. Έτσι τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα ABC και ACD έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου $ABCD$ ως προς τη βάση BC. Ομοίως τα ύψη των τριγώνων $BFE,\ BEC$ προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν $AK \perp BC$ και $B\varLambda \perp FE$, τότε τα τρίγωνα ABK και $BF\varLambda$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και $A\hat{B}K = B\hat{F}\varLambda$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες BC, EF με τέμνουσα τη BF). Άρα θα έχουν και $AK = B\varLambda$ Επομένως τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή $\mathrm{E}_{AFED} = \mathrm{E}_{ABC} + \mathrm{E}_{ACD} + \mathrm{E}_{BFE} + \mathrm{E}_{BEC} = 4\mathrm{E}_{ABC}$ έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{E}_{ABC}}{\mathrm{E}_{AFED}} = \frac{\mathrm{E}_{ABC}}{4\mathrm{E}_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού Α είναι ο αριθμός

$$\Sigma(\mathrm{A}) = a + b + a + b + a + b = 3\cdot a + 3\cdot b = 3\cdot(a + b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του b να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b=0$, τότε $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Επομένως ο αριθμός Α διαιρείται με το 9, όταν ο $3\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a\in\{3,6,9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $\mathrm{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αν $b=5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a+5\in\{3,6,9,12\}$, οπότε αφού $1\le a\le 9$ έπεται ότι $a\in\{1,4,7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot\left(12b+26a\right)\right]^{-2}-\left[6\left(12b+26a\right)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left(2\cdot1\right)^{-2}-\left(6\cdot1\right)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα. Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2}\cdot12+2=8$ ημέρες.

Αν x,y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ και έχουμε

$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow\lambda=100.$$

Άρα έχουμε: