- Αν $b=0$, τότε $\Sigma(\text{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Επομένως ο αριθμός Α διαιρείται με το 9, όταν ο $3\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a\in\{3,6,9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $\text{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αν $b=5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι $\Sigma(\text{A})=3\cdot(a+5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a+5\in\{3,6,9,12\}$, οπότε αφού $1\le a\le 9$ έπεται ότι $a\in\{1,4,7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\text{A}=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\text{A}&=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot(12b+26a)\right]^{-2}-\left[6(12b+26a)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-(2\cdot1)^{-2}-(6\cdot1)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα. Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2}\cdot 12+2=8$ ημέρες.

Αν x,y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ και έχουμε

$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow\lambda=100.$$

Άρα έχουμε:

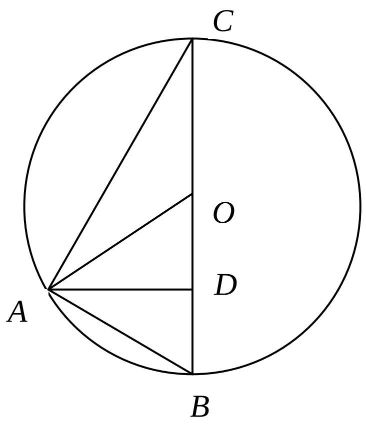
$\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

$\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 12 \cdot 100 = 1000$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

$\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.



α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$

Λύση

α) Επειδή είναι $\hat{A} = 90^\circ$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64.$$

Άρα είναι $BC = 8$.

β) Η διάμεσος AO ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι $AO = \frac{8}{2} = 4$.

Για την εύρεση του ύψους AD χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ABC και έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC έχει εμβαδόν $E_x = E - (ABC) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}$, οπότε

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7}.$$

$$\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64},$$

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3{,}14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9$.

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α.

Λύση

Είναι $\mathrm{A} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $\mathrm{B} = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 396 \Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4$$
$$\Leftrightarrow c = a - 4. \qquad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\mathrm{A} - 41 = 50(a + b + c) \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c$$
$$\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41,$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \qquad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο Α=541.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - \left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right) - 6x^2y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3 \\
&= y^3.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε