$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2(x+y+z)+6}{4}$$
$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2\cdot 3+6}{4}=3\,.$$
Η ισότητα αληθεύει όταν $x=y+1=z+2$, οπότε από την σχέση $x+y+z=3$ προκύπτει ότι $x+x-1+x-2=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ και $y=1, z=0$.

## Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**
Να λύσετε την εξίσωση
$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}\,.$$

**Λύση (1$^{ος}$ τρόπος)**
Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση
$$3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$
Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την
$$\left(x^2+2\right)^2=9(3x-2)\Leftrightarrow x^4+4x^2-27x+22=0\,. \qquad (1)$$
Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση
$$(x-1)\left(x^3+x^2+5x-22\right)=0.$$
Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για $x=2$, για το πολυώνυμο $x^3+x^2+5x-22$ καταλήγουμε στην εξίσωση
$$(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2+3x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$
αφού το τριώνυμο $x^2+3x+11=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-35<0$.

**2$^{ος}$ τρόπος**
Ομοίως πρέπει $x\ge\frac{2}{3}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό
$$y=\sqrt{3x-2},\ \text{για } x\ge\frac{2}{3}\,.$$
Τότε λαμβάνουμε
$$y\ge 0 \text{ και } y^2=3x-2\,,$$
ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται
$$x^2+2=3y\,.$$
Έτσι έχουμε το σύστημα
$$\left\{\begin{matrix} x^2=3y-2 \\ y^2=3x-2 \end{matrix}\right\} \text{ με } x\ge\frac{2}{3} \text{ και } y\ge 0\,.$$

Με αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2 - y^2 = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x + y = -3.$$

Η εξίσωση $x + y = -3$ είναι αδύνατη λόγω των περιορισμών $x \geq \frac{2}{3}$ και $y \geq 0$.

Για $x = y$ έχουμε την εξίσωση

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

**Πρόβλημα 2**

Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν $n$ ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμός. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός $n$ των ομάδων που συμμετείχαν.

**Λύση**

Έστω ότι συμμετέχουν $n$ ομάδες.

Η 1η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες $n$-1 ομάδες , οπότε διεξάγονται $n$-1 αγώνες.

Η 2η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες $n$-2 ομάδες , οπότε διεξάγονται $n$-2 αγώνες.

Η 3η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες $n$-3 ομάδες , οπότε διεξάγονται $n$-3 αγώνες.

..........................................................................................................................

Η (n-1)η ομάδα παίζει με την τελευταία 1 ομάδα , οπότε διεξάγεται 1 αγώνας .

Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1). \qquad (1)$$

Αν γράψουμε τις ισότητες

$$\Sigma = \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$\Sigma = (n-1) + (n-2) + \ldots \quad 2 \quad + \quad 1$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη, τότε λαμβάνουμε

$$2\Sigma = (n-1)\left[(n-1)+1\right] = (n-1)n \Rightarrow \Sigma = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Σε κάθε αγώνα ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δίνονται στις δύο ομάδες που συμμετέχουν (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα) είναι 4. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\frac{364}{4} = 91 \quad . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(n-1)n}{2} = 91 \Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} = 7 \cdot 13 \Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} = \frac{13 \cdot 14}{2} \Leftrightarrow n = 14.$$

Άρα συμμετείχαν 14 ομάδες.

**Πρόβλημα 3.**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $x, y, z$ ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό $m$ που είναι τέτοιος ώστε:

$$x + y + z + m \leq 0.$$

**Λύση**

Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+6z+9=1$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$$

και θέτοντας $a=x+1$, $\beta=y+2$ και $\gamma=z+3$, έχουμε τελικά

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

που είναι ισοδύναμη με τη γνωστή ανισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Επομένως έχουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3\cdot 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+y+z+6|\leq\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x+y+z+6\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-\sqrt{3}\leq x+y+z+6-\sqrt{3}\leq 0.$$

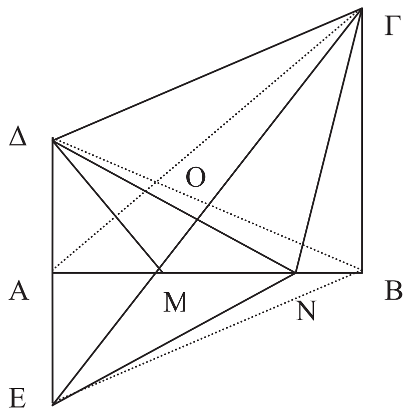
Επειδή η ισότητα ισχύει για $x+1=y+2=z+3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, έπεται ότι ο ζητούμενος μέγιστος θετικός αριθμός είναι ο $m=6-\sqrt{3}$.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

- **(i)** Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma}$.
- **(ii)** Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\mathrm{\Delta M}+\mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.
- **(iii)** Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

**Λύση**




**(i)** Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}=\alpha+2\alpha\sqrt{2}=\alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma}=\alpha\sqrt{5}+2\alpha=\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)$, οπότε

$$\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow \alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)<\alpha\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$$
$$\Leftrightarrow 8<6+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1<\sqrt{5}, \text{ που ισχύει.}$$

**(ii)** Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΑΒ και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ, τότε $\Delta\mathrm{M}=\mathrm{ME}$ και

$$\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma=\mathrm{EM}+\mathrm{M}\Gamma=\mathrm{E}\Gamma. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχόν σημείο Ν πάνω στην ευθεία ΑΒ, διαφορετικό από το Μ, οπότε θα ισχύει ΔΝ = ΝΕ και

$$\Delta\mathrm{N}+\mathrm{N}\Gamma=\mathrm{EN}+\mathrm{N}\Gamma\ . \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία, ενώ η γραμμή ΕΝΓ έχει τα ίδια άκρα με την ΕΜΓ και είναι τεθλασμένη, έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma=\mathrm{E}\Gamma<\mathrm{EN}+\mathrm{N}\Gamma=\Delta\mathrm{N}+\mathrm{N}\Gamma.$$

Άρα το σημείο Μ είναι τέτοιο ώστε το άθροισμα ΔΜ + ΜΓ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

**(iii)** Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E}=2\alpha=\mathrm{B}\Gamma$ και $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{AB},\ \mathrm{B}\Gamma\perp\mathrm{AB}\Rightarrow\Delta\mathrm{E}\parallel\mathrm{B}\Gamma$, το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιοι του ΔΕΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε το Ο είναι το μέσον της ΔΒ και η ΕΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ. Επίσης η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ, αφού ισχύει ΑΔ =ΑΕ $=\alpha$ . Άρα το σημείο τομής Μ των δύο διαμέσων του τριγώνου ΔΕΒ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{AB}}{3}=\frac{2\alpha}{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left(\Delta\mathrm{M}\Gamma\right)=\left(\Delta\mathrm{E}\Gamma\right)-\left(\Delta\mathrm{EM}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot2\alpha-\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3}=\frac{4\alpha^2}{3}.$$

Διαφορετικά έχουμε

$$\mathrm{MB}=2\alpha-\frac{2\alpha}{3}=\frac{4\alpha}{3}\ \text{και}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta\mathrm{M}\Gamma\right)&=\left(\mathrm{AB}\Gamma\Delta\right)-\left(\Delta\mathrm{AM}\right)-\left(\mathrm{MB}\Gamma\right)\\&=\frac{\left(\alpha+2\alpha\right)\cdot2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{4\alpha}{3}\\&=3\alpha^2-\frac{\alpha^2}{3}-\frac{4\alpha^2}{3}=\frac{4\alpha^2}{3}.\end{aligned}$$

## Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1** Εάν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq0$ και

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

**Λύση (1ος τρόπος)**

Αν θέσουμε

$$w=\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3},$$

τότε έχουμε

$$w=\overline{w}\Leftrightarrow\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=\frac{6\overline{z}^4+5\overline{z}^2+6}{3\overline{z}^4+\overline{z}^2+3},$$