

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a + 2b = \frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned} A &= (16a + 32b)^{-2} - (32a + 64b)^{-3} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} : 3^4 \right]^3 \\ &= \frac{1}{16^2 (a + 2b)^2} - \frac{1}{32^3 (a + 2b)^3} + \left[\left(-\frac{3}{2} \right)^4 \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{(2^4)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{(2^5)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3} + \left[\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{1}{3^4} \right]^3 \\ &= \frac{1}{2^{8-2}} - \frac{1}{2^{15-3}} + \frac{1}{2^{4 \cdot 3}} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2 + 4y^2 + 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy + 4xy \Rightarrow (x + 2y)^2 = \frac{32}{3}xy,$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x \cdot 2y = \frac{20}{3}xy - 4xy \Rightarrow (x - 2y)^2 = \frac{8}{3}xy > 0,$$

οπότε έχουμε:

$$A^2 = \frac{(x + 2y)^2}{(x - 2y)^2} = \frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy} = 4 \Leftrightarrow A = 2 \text{ ή } A = -2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2 + 4y^2 = \frac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση

$u = \frac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 - \frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow u^2 - \frac{20}{3}u + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{64}{9} = 0$$

$$u - \frac{10}{3} = \frac{8}{3} \text{ ή } u - \frac{10}{3} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow u = 6 \text{ ή } u = \frac{2}{3}.$$

Για $u = \frac{x}{y} = 6$ λαμβάνουμε $x = 6y$, οπότε: $A = \frac{6y+2y}{6y-2y} = 2.$

Για $u = \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x = 2y$, οπότε: $A = \frac{x+3x}{x-3x} = -2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab + 4(a + b) = 10a + b,$$

όπου a, b ψηφία, $a \neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab + 4a + 4b = 10a + b \Leftrightarrow ab - 6a + 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow a(b - 6) + 3(b - 6) = -18 \Leftrightarrow (a + 3)(b - 6) = -18$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)(6 - b) = 18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4 \leq a + 3 \leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a + 3, 6 - b) = (6, 3) \text{ ή } (9, 2)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 3) \text{ ή } (6, 4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο K , έτσι ώστε να είναι $AK > KB$. Έστω M το συμμετρικό του B ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο K . Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία GM τέμνει την πλευρά $A\Delta$ στο σημείο E . Η GE είναι ύψος του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, αν είναι $GE \perp A\Delta$ ή $\widehat{G\hat{E}\Delta} = 90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\widehat{E\hat{G}\Delta} + \widehat{G\hat{\Delta}E} = 90^\circ$.

Όμως είναι

$$\widehat{E\hat{G}\Delta} = \widehat{K\hat{G}B}, \tag{1}$$

λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία GD .

Επίσης έχουμε

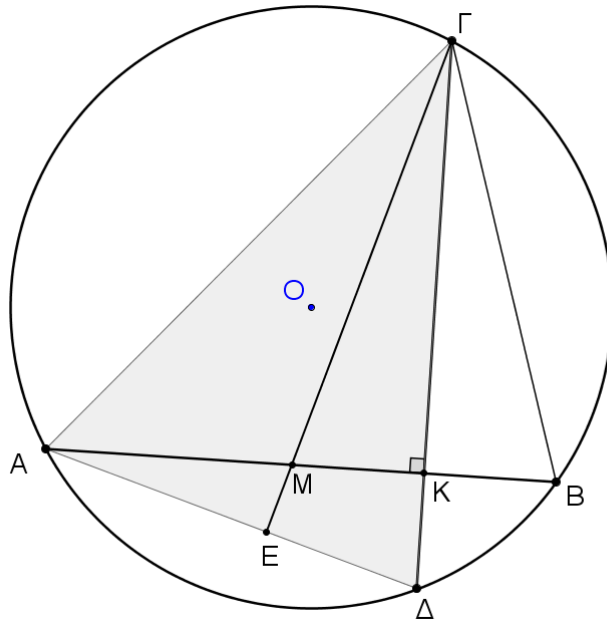
$$\widehat{G\hat{\Delta}E} = \widehat{G\hat{\Delta}A} = \widehat{G\hat{B}A} = \widehat{G\hat{B}K},$$

αφού οι γωνίες $\widehat{G\hat{\Delta}A}$, $\widehat{G\hat{B}A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\widehat{G\hat{\Delta}E} = \widehat{G\hat{B}K}, \tag{2}$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$\widehat{E\Gamma\Delta} + \widehat{\Delta\Gamma E} = \widehat{K\Gamma B} + \widehat{\Gamma B K} = 180^\circ - \widehat{\Gamma K B} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\widehat{\Gamma B K}$ και $\widehat{K\Gamma B}$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου $\Gamma K B$.
Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $AK \perp \Gamma\Delta$, δηλαδή AK είναι επίσης ύψος του τριγώνου $A\Gamma\Delta$, οπότε το σημείο M είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$.

Α' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$A = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}},$$

όπου m, n ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$ και $xy \neq -1$.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = \frac{\left(\frac{x^2 y^2 - 1}{y^2}\right)^m \left(\frac{xy + 1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2 y^2 - 1}{x^2}\right)^n \left(\frac{xy - 1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} \\ &= \frac{(x^2 y^2 - 1)^{m-n} \cdot x^{2n} \cdot (xy + 1)^{n-m} \cdot y^{m-n} \cdot y^{m+n}}{y^{2m} \cdot (xy - 1)^{m-n} \cdot x^{n-m} \cdot x^{m+n}} \\ &= \frac{(xy + 1)^{m-n} (xy - 1)^{m-n} \cdot (xy + 1)^{n-m}}{(xy - 1)^{m-n}} \cdot x^{2n-2n} \cdot y^{2m-2m} = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α, β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν: