- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$\left(a,b\right)=\left(8,0\right) \text{ή } \left(7,1\right) \text{ ή } \left(9,1\right) \text{ ή } \left(4,2\right) \text{ή } \left(6,2\right) \text{ή } \left(1,3\right)$$
$$\text{ή } \left(9,3\right) \text{ή } \left(2,4\right) \text{ή } \left(4,4\right) \text{ή } \left(3,5\right) \text{ή } \left(5,5\right),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $\left(a,b\right)=\left(4,4\right)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\begin{Bmatrix} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=ax-2a \\ x^2+4\left(ax-2a\right)^2=4a^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{Bmatrix}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $\left(x,y\right)=\left(0,0\right)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $\left(x,y\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\left(x,y\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x+y+z$ και $S_2 = xy+yz+zx$, όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y,z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=6 \Leftrightarrow x(xy+xz)+y(yz+yx)+z(zx+zy)=6$$

$$\Leftrightarrow x(S_2-yz)+y(S_2-zx)+z(S_2-xy)=6$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6.$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{array}\right\},$$

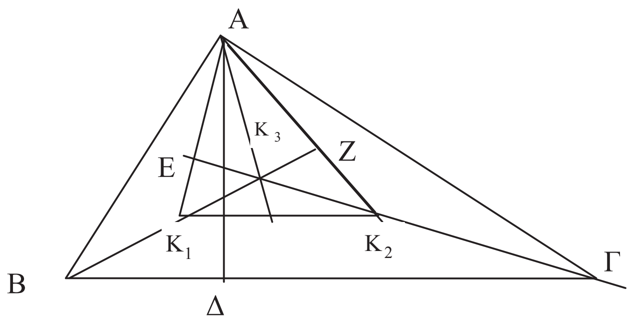
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$(x,y,z)=(2,1,0) \text{ ή } (1,2,0) \text{ ή } (2,0,1) \text{ ή } (1,0,2) \text{ ή } (0,2,1) \text{ ή } (0,1,2).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K}_1\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{E}=\mathrm{K}_3\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{E}=\mathrm{K}_3\hat{\mathrm{K}}_2\mathrm{Z}=\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{K}_2=45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα AEK_3, $\mathrm{K}_3\mathrm{EK}_1$ και $\mathrm{K}_3\mathrm{ZK}_2$ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο K_3 είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AK}_1\mathrm{K}_2$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK}_3\mathrm{E}$ και $\mathrm{K}_2\mathrm{EK}_1$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\mathrm{EK}_3=\mathrm{EK}_1$ και $\mathrm{K}_1\hat{\mathrm{K}}_2\mathrm{E}=\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}_3$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $\mathrm{AK}_3=\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1<k<30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x)=k(x-1)P(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0, n\geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n=ka_n\Leftrightarrow k=3^n.$$

Επειδή είναι $1<k<30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n=1$ ή $n=2$ ή $n=3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x-3^n\right)P(3x)=3^n(x-1)P(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Για $n=1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x)=3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για $x=1$ προκύπτει $P(3)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_1(x-3)$.

Για $n=2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x)=3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$ και $P(9)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_2(x-3)(x-9)$.

Για $n=3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x)=3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$, $P(9)=0$ και $P(27)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.