



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008.$$

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$B = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right)$$

Λύση

(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} A &= 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009) \\ &= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12} \right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32} \\ \Gamma &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9} \right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22}. \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$B - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0,$$

έπεται ότι είναι $B > \Gamma$.

Πρόβλημα 2

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση

Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:

$$x - y = 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297$$

$$\Leftrightarrow 99(\alpha - \gamma) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$$\alpha = 3, \gamma = 0 \text{ ή } \alpha = 4, \gamma = 1 \text{ ή } \alpha = 5, \gamma = 2 \text{ ή } \alpha = 6, \gamma = 3 \text{ ή } \alpha = 7, \gamma = 4 \text{ ή } \alpha = 8, \gamma = 5 \text{ ή } \alpha = 9, \gamma = 6.$$

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha + \beta + \gamma = 10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x = \overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:
370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος ΑΒ = x μέτρα και μήκος ΒΓ = y μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1 = x + \frac{25x}{100} = \frac{125x}{100} = \frac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1 = y - \frac{\alpha y}{100} = \frac{(100 - \alpha)y}{100} = \frac{(100 - \alpha) \cdot 2x}{100},$$

ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy = x_1 y_1 \Leftrightarrow x \cdot 2x = \frac{5x}{4} \cdot \frac{(100 - \alpha) \cdot 2x}{100} \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{100 - \alpha}{80} \cdot 2x^2$$

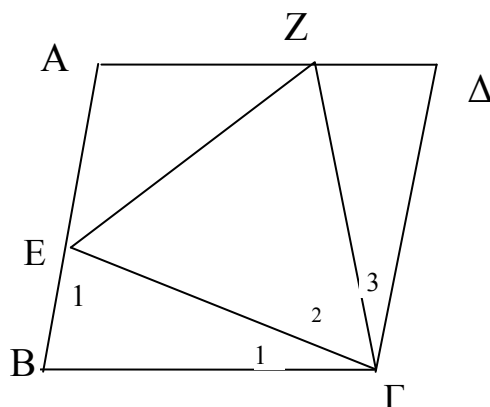
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{100 - \alpha}{80}\right) \cdot 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{100 - \alpha}{80} = 0 \text{ (αφού } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 80 - 100 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α . Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α , το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{B} = \hat{E}_1 \quad (1)$$

Επειδή είναι ΑΒ || ΓΔ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{E}_1 = E\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 60^\circ + \hat{\Gamma}_3, \quad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ = α, ΓΕ = ΓΔ = α, προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \quad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,

Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + B\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ \quad (\text{λόγω της (1)})$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2 \cdot (60^\circ + \hat{\Gamma}_1) = 180^\circ \quad (\text{λόγω της (2)})$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \hat{\Gamma}_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^\circ.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ, \quad \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^\circ \quad \text{και} \quad \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$