Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left[(-1)^{\nu}+(-1)^{2\nu}+(-1)^{3\nu}+(-1)^{4\nu}\right]\cdot\nu=\left[(-1)^{\nu}+1+\left((-1)^{3}\right)^{\nu}+1\right]\cdot\nu$$

$$=\left[2+2\cdot(-1)^{\nu}\right]\cdot\nu=\begin{cases}4\nu, \text{ αν } \nu \text{ άρτιος}\\ 0, \text{ αν } \nu \text{ περιττός.}\end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $\mathrm{A}\neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu\in\{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu\in\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,3,6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu=2 \text{ ή } \nu=6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N=\overline{ab}=10a+b$, όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

$$10a+b=ab-(a+b)\Leftrightarrow 11a=ab-2b\Leftrightarrow (11-b)a=-2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S=1^2-2^2-3^2+4^2+5^2-6^2-7^2+8^2+\cdots+997^2-998^2-999^2+1000^2.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής

$$S_k=(4k+1)^2-(4k+2)^2-(4k+3)^2+(4k+4)^2, \text{ για } k=0,1,2,3,...,249.$$

Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2-(4k+2)^2-(4k+3)^2+(4k+4)^2 \\ &= 16k^2+8k+1-16k^2-16k-4-16k^2-24k-9+16k^2+32k+16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k=0,1,2,3,\ldots,249. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

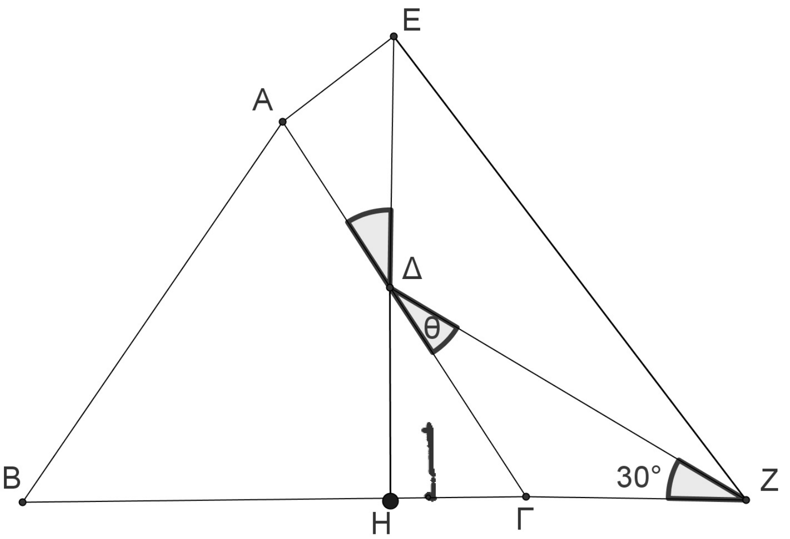
$$S=S_0+S_1+\ldots+S_{249}=4+4+\ldots4=250\cdot4=1000$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta=30^0$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ.

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση

(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι

$$\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma=\theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } \mathrm{H}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z}=2\theta,$$

οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:

$$90^\circ+2\theta+30^0=180^0 \Leftrightarrow \theta=30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta=\dfrac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma=\theta=30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H\Delta}=\Delta\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu30^0=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H\Gamma}=\Delta\Gamma\cdot\eta\mu30^0=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma=\theta=30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή είναι $\mathrm{H\Gamma}=\dfrac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H\Delta}=\dfrac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{Z}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}Z = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma Z = \Gamma\Delta = \dfrac{\beta}{2}$ και

$$HZ = H\Gamma + \Gamma Z = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ με $\Delta\hat{A}E = 90^\circ$, $A\hat{\Delta}E = 30^0$ και $A\Delta = \dfrac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$A\Delta = \frac{\Delta E}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$HE = H\Delta + \Delta E = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο HEZ με $\hat{H} = 90^\circ$ έχουμε:

$$EZ = \sqrt{HE^2 + HZ^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$