Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$x^3+y^3=65z^3$$
$$x^2y+xy^2=20z^3$$
$$x-y+2z=10.$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3=125z^3 \Leftrightarrow x+y=5z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy=20z^3, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $z \neq 0$.

Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy=4z^2. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z-x)=4z^2 \Leftrightarrow x^2-5zx+4z^2=0 \Leftrightarrow x=4z \text{ ή } x=z,$$

οπότε θα είναι

$$x=4z, y=z \text{ ή } x=z, y=4z.$$

Για $x=4z, y=z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z=10 \Leftrightarrow z=2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(8,2,2)$, ενώ για $x=z,\ y=4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z=10 \Leftrightarrow z=-10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(-10,-40,-10)$.

(ii) Για $z=0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=0\\ xy(x+y)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x+y=0 \text{ ή } x=y=0 \Leftrightarrow x=-y,$$

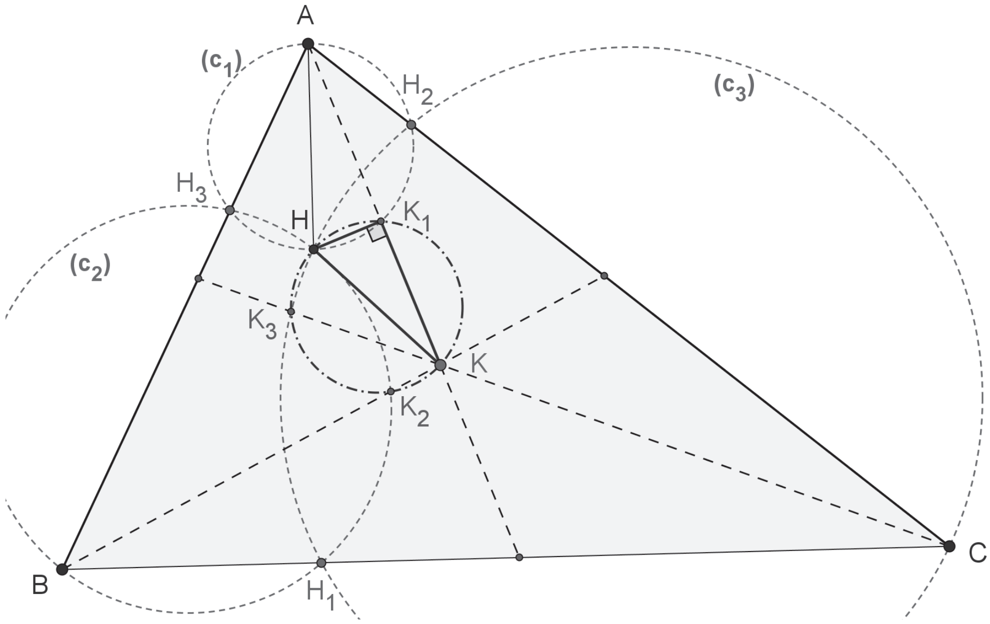
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x,y,z)=(5,-5,0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.
Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha + 1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha - 1)(\alpha + 3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha - 3)^2 - 4 = (\alpha - 5)(\alpha - 1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1},\ x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:

$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2 - b^2 = (a - 2b)^2 \Leftrightarrow 4ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow b(4a - 5b) = 0 \Leftrightarrow 4a = 5b,$$

αφού είναι $b \neq 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$4\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = 5\sqrt{x^2 + x + 1},$$

της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$16 \cdot (2x^2 + 3x + 2) = 25 \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 23x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-23 \pm 3\sqrt{37}}{14}.$$